SÉRIES

Exercice 1 :

1. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

   Justifier qu'elle converge et calculer sa somme.

2. Même question pour la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{4n^2-1}$

Exercice 2 :

1. On considère la série de terme général $u_n = \ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right), n \geq 2$

   Justifier qu'elle converge et calculer sa somme.

2. Même question pour la série de terme général $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right), n \geq 2$

Exercice 3 :

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme :

$A: \sum_{n\geq 0} \frac{3}{2^n}$ $B: \sum_{n\geq 0} \frac{2}{3^{n+2}}$ $C: \sum_{n\geq 0} \frac{5n}{2^n}$ $D: \sum_{n\geq 0} \frac{4n+3}{5^{n-1}}$

$E: \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{5^n}$ $F: \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n^2}{3^{n+1}}$ $G: \sum_{n\geq 0} \frac{4n^2+3n2^n}{5^n}$ $H: \sum_{n\geq 0} \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$

Exercice 4 :

$I: \sum_{n\geq 0} \frac{4(-1)^{n+1}}{n!}$ $J: \sum_{n\geq 0} \frac{n2^n}{n!}$ $K: \sum_{n\geq 0} \frac{n(1+3^n)}{n!}$

$L: \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \lambda \in \mathbb{R}$ $M: \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2n-1}{n!}$ $N: \sum_{n\geq 1} \frac{n^2+3}{(n-1)!}$

$O: \sum_{n\geq 0} \frac{3}{(n+1)!}$ $P: \sum_{n\geq 0} \frac{5n-2}{(n+2)!}$

Exercice 5 :

1. Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait :

$$2x^3 + x^2 - 4x - 2 = ax(x-1)(x-2) + bx(x-1) + cx + d$$

2. Etudier la convergence puis calculer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \frac{2n^3 + n^2 - 4n - 2}{n!}, n \geq 0$$