SÉRIES

Exercice 1 :

1. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-k}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$$
$$=1+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1$: la série converge vers 1

2. $$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{a}{2n-1}+\frac{b}{2n+1}$$
On multiplie par $2n+1$:
$\frac{1}{(2n-1)}=\frac{a(2n+1)}{2n-1}+b$
Avec $n=\frac{-1}{2}$, on obtient $\frac{1}{-2}=b$
On multiplie par $2n-1$:
$\frac{1}{(2n+1)}=a+\frac{b(2n-1)}{2n+1}$
Avec $n=\frac{1}{2}$, on obtient $\frac{1}{2}=a$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=-1}^{n-1}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2n+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=-\frac{1}{2}$: la série converge vers $-\frac{1}{2}$

Exercice 2 :

1. $$\ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)=3\ln n-\ln(n+2)-2\ln(n-1)$$
$$\sum_{k=2}^{n}u_k=3\sum_{k=2}^{n}\ln k-\sum_{k=2}^{n}\ln(k+2)-2\sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)$$
$$=3\sum_{k=2}^{n}\ln k-\sum_{k=4}^{n+2}\ln k-2\sum_{k=1}^{n-1}\ln k$$
$$=3\left(\sum_{k=4}^{n-1}\ln k+\ln 2+\ln 3+\ln n\right)-\left(\sum_{k=4}^{n-1}\ln k+\ln n+\ln(n+1)+\right.$$
$$\left.+\ln(n+2)\right)-2\left(\sum_{k=4}^{n-1}\ln k+\ln 2+\ln 3\right)$$
$$=3\ln 2+3\ln 3+3\ln n-\ln n-\ln(n+1)-\ln(n+2)-2\ln 2-2\ln 3$$
$$=\ln 2+\ln 3+2\ln n-\ln(n+1)-\ln(n+2)$$
$$=\ln 6+\ln\left(\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right)$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n^2}{n^2}\right)$ (*monômes de plus hauts degrés*)
$$=\lim_{n\to+\infty}\ln 1=0$$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}u_k=\ln 6$: la série converge vers $\ln 6$

2. $$\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)=\ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)=\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln(n)$$
$$\sum_{k=2}^{n}u_k=\sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)+\sum_{k=2}^{n}\ln(k+1)-2\sum_{k=2}^{n}\ln(k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k)+\sum_{k=3}^{n+1}\ln(k)-2\sum_{k=2}^{n}\ln(k)$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\ln(k)+\ln 1-\ln n+\sum_{k=2}^{n}\ln(k)-\ln 2+\ln(n+1)-2\sum_{k=2}^{n}\ln(k)$$
$$=-\ln(n)-\ln(2)+\ln(n+1)$$
$$=\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}u_k=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$: la série converge vers $-\ln(2)$

Exercice 3 :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2^k} = 3\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

⇒ Série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{2^k} = 3 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \times \frac{2}{1}$$
$$= 6$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^{k+2}} = \frac{2}{3^2}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

⇒ Série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{k+2}} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{9} \times \frac{3}{2}$$
$$= \frac{1}{3}$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{5k}{2^k} = \frac{5}{2}\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

⇒ Série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5k}{2^k} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{2} \times \frac{4}{1}$$
$$= 10$$

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4k+3}{5^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{4k}{5^{k-1}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{5^{k-1}} = 4\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} + 3 \times 5\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

⇒ Série géométrique et sa dérivée de raisons $\frac{1}{5}$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4k+3}{5^{k-1}} = 4 \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} + 15 \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}}$$
$$= 4 \times \frac{25}{16} + 15 \times \frac{5}{4} = \frac{100}{4}$$
$$= 25$$

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{5^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)+k}{5^k} = \frac{1}{5^2}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{k-2} + \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$$

⇒ Séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2, de raison $\frac{1}{5}$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{5^k} = \frac{1}{25} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{25} \times \frac{2 \times 125}{64} + \frac{1}{5} \times \frac{25}{16} = \frac{5}{32} + \frac{5}{16}$$
$$= \frac{15}{32}$$

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k^2}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} \times \frac{(-1)^k (k(k-1)+k)}{3^k}$$
$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{-1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3} \times \frac{-1}{3}\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{-1}{3}\right)^{k-1}$$

⇒ Sériesgéométriques dérivées d'ordre 1 et 2, de raison $\frac{-1}{3}$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k^2}{3^{k+1}} = \frac{1}{27} \times \frac{2}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{27} \times \frac{2 \times 27}{64} - \frac{1}{9} \times \frac{9}{16} = \frac{1}{32} - \frac{1}{16}$$
$$= \frac{-1}{32}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4k^2 + 3k2^k}{5^k} = 4\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)+k}{5^k} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{k2^k}{5^k}$$
$$= \frac{4}{5^2}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{k-2} + \frac{4}{5}\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} + 3 \times \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$$

⇒ Séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2, de raison $\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{5}$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4k^2 + 3k2^k}{5^k} = \frac{4}{25} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{6}{5} \times \frac{1}{\left(1-\frac{2}{5}\right)^2}$$
$$= \frac{4}{25} \times \frac{2 \times 125}{64} + \frac{4}{5} \times \frac{25}{16} + \frac{6}{5} \times \frac{25}{9} = \frac{5}{8} + \frac{5}{4} + \frac{10}{3}$$
$$= \frac{15 + 30 + 80}{24} = \frac{125}{24}$$

$$H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+3)}{3^{k+2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)+4k}{3^{k+2}}$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^4 \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

⇒ Séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2, de raison $\frac{1}{3}$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k+3)}{3^{k+2}} = \frac{1}{81} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{4}{27} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{81} \times \frac{2 \times 27}{8} + \frac{4}{27} \times \frac{9}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{5}{12}$$

<u>Exercice 4</u> :

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4(-1)^{k+1}}{k!} = -4 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

⇒ Somme partielle d'une série exponentielle avec $x = -1$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{k!} = -4e^{-1} = \frac{-4}{e}$$

$$J_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k2^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k2^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \times 2^{k-1}}{(k-1)!} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!}$$

⇒ Somme partielle d'une série exponentielle avec $x = 2$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k2^k}{k!} = 2e^2$$

$$K_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k\left(1+3^k\right)}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\left(1+3^k\right)}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+3^k}{(k-1)!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{3 \times 3^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k}{k!}$$

⇒ Somme partielle d'une série exponentielle avec $x = 1$ et $x = 3$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\left(1+3^k\right)}{k!} = e + 3e^3 = e(1+3e^2)$$

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$

⇒ Somme partielle d'une série exponentielle avec $x = \lambda$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = e^0 = 1$$

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+2k-1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)+3k-1}{k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + 3\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

⇒ Somme partielle d'une série exponentielle avec $x = 1$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2+2k-1}{k!} = e + 3e - e = 3e$$

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+3}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(k-2)+3(k-1)+4}{(k-1)!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(k-2)}{(k-1)!} + 3\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)}{(k-1)!} + 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}$$
$$= \sum_{k=3}^{n} \frac{(k-1)(k-2)}{(k-1)!} + 3\sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)}{(k-1)!} + 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}$$
$$= \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-3)!} + 3\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + 4\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

⇒ Somme partielle d'une série exponentielle avec $x = 1$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2+3}{(k-1)!} = e + 3e + 4e = 8e$$

$$O_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{(k+1)!} = 3\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}$$
$$= 3\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!}\right) = 3\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - 3$$

⇒ Somme partielle d'une série exponentielle avec $x = 1$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{(k+1)!} = 3e - 3$$

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{5k-2}{(k+2)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{5(k+2)-12}{(k+2)!}$$
$$= 5\sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{(k+2)!} - 12\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)!}$$
$$= 5\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} - 12\sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k!}$$
$$= 5\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - 12\left(\sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right)$$
$$= 5\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - 1\right) - 12\left(\sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{k!} - 2\right)$$

⇒ Somme partielle d'une série exponentielle avec $x = 1$ ⇒ série CV

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5k-2}{(k+2)!} = 5(e-1) - 12(e-2) = 19 - 7e$$

<u>Exercice 5</u> :

1) $A = ax(x-1)(x-2) + bx(x-1) + cx + d$
$= (ax^2 - ax)(x-2) + bx^2 - bx + cx + d$
$= ax^3 - 2ax^2 - ax^2 + 2ax + bx^2 - bx + cx + d$
$= ax^3 + x^2(-3a+b) + x(2a-b+c) + d$

On a donc : $\begin{cases} a = 2 \\ -3a + b = 1 \\ 2a - b + c = -4 \\ d = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 + 3 \times 2 = 7 \\ c = -4 - 2 \times 2 + 7 = -1 \\ d = -2 \end{cases}$

D'où $2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 2x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) - 1x - 2$

2) $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k^3 + k^2 - 4k - 2}{k!}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k(k-1)(k-2) + 7k(k-1) - k - 2}{k!}$$
$$= 2\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + 7\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= 2\sum_{k=3}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + 7\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-3)!} + 7\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= 2\sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} + 7\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

On reconnaît des sommes partielles de séries exponentielles avec $x = 1$.
La série converge donc.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 2e + 7e - e - 2e = 6e$$