SOMMES TÉLESCOPİQUES

Exercice 1 :

1. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall k \geq 2, \dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$

2. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 2 :

1. Déterminer trois réels a, b, et c tels que $\forall x > 0$ on ait :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$$

2. On pose $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, $n \geq 0$.

Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 3 :

Evaluer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} \qquad S_4 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$$

Exercice 4 :

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$et $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$.

Calculer $xS_n(x) - S_n(x)$ puis en déduire l'expression de $S_n(x)$ en fonction de n.

Exercice 5 : *Formule de König-Huyghens*

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels. On note $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ la moyenne des x_i.

1. Démontrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2$

2. Quelle formule re probas / stats vient-on de prouver ?

Exercice 6 :

1° Vérifier que $k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2 = (k^2+k+1)^2$

2° Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$

Exercice 7 :

1. Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{x^2+3x+1}{(x-1)^2(x-2)} \qquad G = \frac{4}{(x^2-1)^2} \qquad H = \frac{x^5}{x^4-1}$$

2. Décomposer en éléments simples $I = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

En déduire la décomposition en éléments simples de $J = \dfrac{1}{x^3(x^3+1)}$.

Exercice 8 :

Evaluer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+2k} \qquad S_2 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$$

Exercice 9 :

On considère la série de terme général $u_n = \ln \dfrac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}$, $n \geq 2$

Evaluer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ et en déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$