SOMMES

Exercice 1 :

1. Exprimer à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes :

$S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{12}$

$S_2 = 5^4 + 6^4 + 7^4 + \ldots + 21^4$

$S_3 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1\,024$

$S_4 = 3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 600$

$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots + \frac{10}{1\,024}$

$S_6 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots - 2\,048$

2. Calculer les sommes suivantes :

$S_7 = \sum_{k=0}^{37} 3$ $\quad S_8 = \sum_{k=945}^{2009} 3$ $\quad S_9 = \sum_{k=1}^{14} (-1)^k$ $\quad S_{10} = \sum_{k=0}^{5} \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes et donner les réponses sous forme factorisée / simplifiée :

$S_{11} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2$ $\quad S_{12} = \sum_{k=3}^{n} k^2$ *(ne pas factoriser)* $\quad S_{13} = \sum_{k=2}^{n-3} k^2$ *(ne pas factoriser)*

$S_{14} = \sum_{k=2}^{n} (k-2)^2$ $\quad S_{15} = \sum_{k=1}^{n} (k^2+2)$ $\quad S_{16} = \sum_{k=7}^{n} k$

$S_{17} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-7}{4}$ $\quad S_{18} = \sum_{k=1}^{n} (6k^2+4k+1)$ $\quad S_{19} = \sum_{k=2}^{n} 3^k$

$S_{20} = \sum_{k=1}^{n} 3^{2k}$ $\quad S_{21} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ $\quad S_{22} = \sum_{k=2}^{n} \frac{3^{k+2}}{5^k}$

$S_{23} = \sum_{k=1}^{n} \frac{7}{5^k}$ $\quad S_{24} = \sum_{k=1}^{n} \frac{7 \times 2^{k-1}}{3^{k+1}}$ $\quad S_{25} = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{5}^j$

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour cet exercice, seule la formule $\sum_{k=1}^{n} k$ est supposée connue.

1. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$ à l'aide de sommes usuelles.

2. A l'aide de la question précédente, retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 4 :

On se propose de calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3$ de trois manières.

1° Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.

2° a. Calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$.

b. Etablir une relation entre S_n, T_n et U_n puis en déduire la valeur de S_n.

3° Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Evaluer les sommes $M = \sum_{k=0}^{2n} \max(n,k)$ et $m = \sum_{k=0}^{2n} \min(n,k)$

Exercice 6 :

1. Démontrer les égalités suivantes pour $n \geq 1$:

a. $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$ $\quad$ b. $\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

c. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

d. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

2. *Formule du binôme de Newton.*

Soient a et b deux réels quelconques. :

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$