SOMMES CORRIGÉ

Exercice 1 :

$S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{12}$
$= \sum_{k=3}^{12} 2^k$

$S_2 = 5^4 + 6^4 + 7^4 + \ldots + 21^4$
$= \sum_{k=5}^{21} k^4$

$S_3 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1\,024$
$= \sum_{k=0}^{10} 2^k$

$S_4 = 3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 600$
$= \sum_{k=1}^{200} 3k$

$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots + \frac{10}{1\,024}$
$= \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{2^k}$

$S_6 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots - 2\,048$
$= \sum_{k=0}^{11} (-2)^k$

$S_7 = \sum_{k=0}^{37} 3$
$= 3 \times 38$
$= 114$

$S_8 = \sum_{k=945}^{2009} 3$
$= 3(2\,009 - 945 + 1)$
$= 3\,195$

$S_9 = \sum_{k=1}^{14} (-1)^k$
$= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots - 1 + 1$
$= 0$

$S_{10} = \sum_{k=0}^{5} \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$
$= 1$

Exercice 2 :

$S_{11} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2$
$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$S_{12} = \sum_{k=3}^{n} k^2$
$= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - 1^2 - 2^2$
$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5$

$S_{13} = \sum_{k=2}^{n-3} k^2$
$= \left(\sum_{k=1}^{n-3} k^2\right) - 1$
$= \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} - 1$

$S_{14} = \sum_{k=2}^{n} (k-2)^2$
$= \sum_{k=0}^{n-2} k^2$
$= \frac{(n-2)(n-1)(2(n-2)+1)}{6}$
$= \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$

$S_{15} = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 2)$
$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2$
$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 12n}{6}$
$= \frac{n((n+1)(2n+1) + 12)}{6}$
$= \frac{n(2n^2 + 3n + 13)}{6}$ $(\Delta < 0)$

$S_{16} = \sum_{k=7}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{6} k$
$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{6 \times 7}{2}$
$= \frac{n^2 + n - 42}{2}$
$= \frac{(n-6)(n+7)}{2}$

$S_{17} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-7}{4}$
$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} \frac{7}{4}$
$= \frac{\frac{1}{4}(n(n+1))}{2} - \frac{7}{4} \times n$
$= \frac{n(n+1) - 14n}{8}$
$= \frac{n(n+1-14)}{8} = \frac{n(n-13)}{8}$

$S_{18} = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 4k + 1)$
$= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$
$= n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$
$= n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1)$
$= n(2n^2 + n + 2n + 1 + 2n + 2 + 1)$
$= n(2n^2 + 5n + 4)$ $(\Delta < 0)$

$S_{19} = \sum_{k=2}^{n} 3^k$
$= \sum_{k=0}^{n} 3^k - \sum_{k=0}^{1} 3^k$
$= \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} - (1 + 3)$
$= \frac{3^{n+1} - 1}{2} - 4$
$= \frac{3^{n+1} - 9}{2}$

$S_{20} = \sum_{k=1}^{n} 3^{2k}$
$= \sum_{k=1}^{n} (3^2)^k$
$= 9\frac{1 - 9^n}{1 - 9}$
$= \frac{9(9^n - 1)}{8}$

$S_{21} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$
$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

$S_{22} = \sum_{k=2}^{n} \frac{3^{k+2}}{5^k}$
$= 3^2 \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

$$S_{23} = \sum_{k=1}^{n} \frac{7}{5^k}$$
$$= 7\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k$$
$$= 7\times\frac{1}{5}\times\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n}}{1-\frac{1}{5}}$$
$$= \frac{7}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\right)$$

$$S_{24} = \sum_{k=1}^{n} \frac{7\times 2^{k-1}}{3^{k+1}}$$
$$= \frac{7}{9}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{3^{k-1}}$$
$$= \frac{7}{9}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$
$$= \frac{7}{9}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{7}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$$

$$= 9\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{1}\left(\frac{3}{5}\right)^k\right)$$
$$= 9\left(\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}} - 1 - \frac{3}{5}\right)$$
$$= 9\left(\frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) - \frac{8}{5}\right)$$
$$= 9\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\times\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} - \frac{8}{5}\right)$$
$$= 9\left(\frac{9}{10} - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right) *$$
$$= \frac{27}{10}\left(3-5\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right)$$

$$S_{25} = \sum_{j=1}^{n}\sqrt{5}^{j}$$
$$= \sum_{j=0}^{n}\sqrt{5}^{j} - 1$$
$$= \frac{1-\sqrt{5}^{n+1}}{1-\sqrt{5}} - 1$$
$$= \frac{1-\sqrt{5}^{n+1}-1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}^{n+1}}{1-\sqrt{5}}$$

<u>Exercice 3</u> :

1. $$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+3k+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}k^3 + 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$
$$= \sum_{k=1}^{n}k^3 + 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

2. $$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n}k^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = 3\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$\sum_{k=2}^{n+1}k^3 - \sum_{k=1}^{n}k^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = 3\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$(n+1)^3 - 1^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = 3\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$\frac{2(n+1)^3 - 2 - 3n(n+1) - 2n}{2} = 3\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$\frac{2n^3+6n^2+6n+2-2-3n^2-3n-2n}{6} = \sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$\frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=1}^{n}k^2$$

<u>Exercice 4</u> :

1° $$S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3$$
$$= \sum_{k=0}^{n}8k^3+12k^2+6k+1$$
$$= 8\sum_{k=0}^{n}k^3 + 12\sum_{k=0}^{n}k^2 + 6\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1$$
$$= 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
$$= 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + n + 1$$
$$= (n+1)(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n + 1)$$
$$= (n+1)(2n^3+2n^2+4n^2+2n+3n+1)$$
$$= (n+1)(2n^3+6n^2+5n+1)$$
$$= (n+1)^2(2n^2+4n+1)$$ *(remarquer que -1 est une racine évidente ➔ factoriser par $(n+1)$)*

2° a. $$T_n = \sum_{k=0}^{n}(2k)^3 \quad \text{et} \quad U_n = \sum_{k=0}^{2n+1}k^3$$
$$= 8\sum_{k=0}^{n}k^3 \qquad = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4}$$
$$= 2n^2(n+1)^2 \qquad = (2n+1)^2(n+1)^2$$

b. $U_n = S_n + T_n$

D'où $S_n = (2n+1)^2(n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2$

$= (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2)$

$= (n+1)^2(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2)$

$= (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$

3° Initialisation : $n = 0$

$S_0 = \sum_{k=0}^{0}(2k+1)^3 = (2\times 0+1)^3 = 1$ et $(0+1)^2(2\times 0^2 + 4\times 0 + 1) = 1\times 1 = 1$

La propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$ pour un certain n.

Montrons que $S_{n+1} = (n+2)^2(2(n+1)^2 + 4(n+1) + 1)$

$= (n+2)^2(2(n^2+2n+1) + 4n + 4 + 1)$

$= (n+2)^2(2n^2 + 4n + 2 + 4n + 4 + 1)$

$= (n+2)^2(2n^2 + 8n + 7)$

$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)^3$

$= S_n + (2(n+1)+1)^3$

$= (n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3$

$= (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) + (2n)^3 + 3(2n)^2 3 + 3(2n)3^2 + 3^3$

$= 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 + 8n^3 + 9(4n^2) + 27(2n) + 27$

$= 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28$

Or, $A = (n+2)^2(2n^2+8n+7)$

$= (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7)$

$= 2n^4 + 8n^3 + 7n^2 + 8n^3 + 32n^2 + 28n + 8n^2 + 32n + 28$

$= 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28$

Donc $S_{n+1} = (n+2)^2(2n^2+8n+7)$

Par récurrence, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1), \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 5</u> :

$M = \sum_{k=0}^{2n} \max(n,k)$

$= \sum_{k=0}^{n} \max(n,k) + \sum_{k=n+1}^{2n} \max(n,k)$

$= \sum_{k=0}^{n} n + \sum_{k=n+1}^{2n} k$

$= n(n+1) + \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n} k$

$= n(n+1) + \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n(2n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1+4n+2)}{2} = \frac{n(5n+3)}{2}$

$m = \sum_{k=0}^{2n} \min(n,k)$

$= \sum_{k=0}^{n} \min(n,k) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(n,k)$

$= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n$

$= \frac{n(n+1)}{2} + n(2n - (n+1) + 1)$

$= \frac{n(n+1)}{2} + n\times n$

$= \frac{n(n+1) + 2n^2}{2}$

$= \frac{n(n+1+2n)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$

<u>Exercice 6</u> :

a. Démontrons que $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $n = 1$

$\sum_{k=0}^{1-1}(2k+1) = 2\times 0 + 1 = 1$ et $1^2 = 1$ donc la propriété est vérifiée.

Hérédité : supposons que $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$ pour un certain $n \geq 1$.

Montrons que $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.

$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) + 2n + 1$

$= n^2 + 2n + 1$ par HR

$= (n+1)^2$

Par récurrence, $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b. Démontrons que $\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $n = 1$

$\sum_{k=1}^{1} k \times 2^{k-1} = 1 \times 2^{1-1} = 1 \times 1 = 1$ et $(1-1)2^1 + 1 = 0 \times 2 + 1 = 1$

La propriété est bien vérifiée pour $n = 1$.

Hérédité : supposons que $\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ pour un certain $n \geq 1$.

Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} = n2^{n+1} + 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} + (n+1)2^n \\ &= (n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n \text{ par HR} \\ &= 2^n(n-1+n+1) + 1 \\ &= 2^n \times 2n + 1 \\ &= n2^{n+1} + 1\end{aligned}$$

Par récurrence, $\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c. Démontrons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $n = 1$

$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ donc la propriété est vérifiée.

Hérédité : supposons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ pour un certain $n \geq 1$.

Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ par HR} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

Par récurrence, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d. Démontrons que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $n = 1$

D'une part, $\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1(1+1)(1+2) = 1 \times 2 \times 3 = 6$

D'autre part, $\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4} = 6$

La propriété est bien vérifiée pour $n = 1$.

Hérédité : supposons que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ pour un certain rang $n \geq 1$.

Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \text{ par HR} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) + 4(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}\end{aligned}$$

Par récurrence, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. *Formule du binôme de Newton.*

Initialisation : $n = 0$

On a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}b^k = \binom{0}{0} a^{0-0}b^0 = 1$

Hérédité : supposons que pour un certain n on ait $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$.

Montrons que cette propriété est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned}S &= (a+b)^{n+1} \\ &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \quad \textit{par HR} \\ &= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k$$

$$= \left(\binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \right)$$

$$= 1 \times a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \right) + 1 \times a^0 b^{n+1}$$

$$= 1 \times a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k \right) + 1 \times a^0 b^{n+1}$$

$$= 1 \times a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \right) + 1 \times a^0 b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \right) + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$