LES BASES CORRIGÉ

Fractions

Ex 1 : Simplifier les nombres et les calculs suivants :

$$A = \frac{4\,410}{8\,232} = \frac{10 \times 441}{2 \times 2 \times 2 \times 1\,029} = \frac{2 \times 5 \times 3 \times 147}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 343} = \frac{5 \times 3 \times 49}{2 \times 2 \times 7 \times 49} = \frac{15}{28}$$

$$B = \frac{7}{5} - \frac{35}{60} \times \frac{48}{21} = \frac{7}{5} - \frac{7 \times 5 \times 6 \times 4 \times 2}{6 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7} = \frac{7 \times 3}{5 \times 3} - \frac{4 \times 5}{3 \times 5} = \frac{1}{15}$$

$$C = \frac{1 - \frac{5}{6}}{1 + \frac{1}{6}} \quad (\times 6) \quad = \frac{6 - 5}{6 + 1} = \frac{1}{7}$$

$$D = \frac{\frac{7}{10} - \frac{2}{15}}{\frac{7}{10} + \frac{2}{15}} = \frac{\frac{21}{30} - \frac{4}{30}}{\frac{21}{30} + \frac{4}{30}} = \frac{17}{25}$$

$$E = \frac{2}{5} \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} \times \frac{25}{9} = \frac{10}{9}$$

$$F = \frac{2}{5} \frac{2}{\left(1 - \frac{2}{5}\right)^3} = \frac{2}{5} \frac{2}{\left(\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{2}{5} \times 2 \times \frac{5^3}{3^3} = \frac{100}{27}$$

$$G = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

Ex 2 : Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{x+3}{x(x-1)^2} - \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{x(x+3) - (x-1)}{x^2(x-1)^2} = \frac{x^2 + 3x - x + 1}{x^2(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{x^2(x-1)^2}$$

$$B = \frac{3}{2n^2} - \frac{1}{n(n-1)} = \frac{3(n-1) - 2n}{2n^2(n-1)} = \frac{3n - 3 - 2n}{2n^2(n-1)} = \frac{n-3}{2n^2(n-1)}$$

$$C = \frac{\frac{x^2 + x}{2x-1}}{\frac{x^3}{4x-2}} = \frac{x^2 + x}{2x-1} \times \frac{4x-2}{x^3} = \frac{x(x+1)}{2x-1} \times \frac{2(2x-1)}{x^3} = \frac{2(x+1)}{x^2}$$

$$D = \frac{3x+3}{x-1} \times \frac{(2x-2)}{x^2} \times \frac{x(2x^2-6x)}{x+1} = \frac{3(x+1)}{x-1} \times \frac{2(x-1)}{x^2} \times \frac{2x^2(x-3)}{x+1} = 12(x-3)$$

$$E = \frac{(2x^2 + 2x)(15 - 3x)}{2x(5-x)} = \frac{2x(x+1)3(5-x)}{2x(5-x)} = 3(x+1)$$

$$F = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$G = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$H = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ac}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$I = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ex 3 :

a. $5 = \frac{3x+2}{11x+7}$ avec $x \neq \frac{-7}{11}$

$5(11x+7) = 3x+2$
$55x + 35 = 3x + 2$
$55x - 3x = 2 - 35$
$52x = -33$
$x = \frac{-33}{52}$

b. $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow y(cx+d) = ax+b$ si $cx+d \neq 0$

$\Leftrightarrow ycx + yd = ax + b$
$\Leftrightarrow ycx - ax = b - yd$
$\Leftrightarrow x(yc - a) = b - yd$
$\Leftrightarrow x = \frac{b - yd}{yc - a}$ si $yc - a \neq 0$

Ex 4 : La clé est la division euclidienne.

On a $159 = 46 \times 3 + 21$

D'où $\frac{159}{46} = 3 + \frac{21}{46}$: $a = 3$ et $\frac{21}{46} = \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$

Donc $\frac{46}{21} = b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}$

Or, $46 = 21 \times 2 + 4$

D'où $\frac{46}{21} = 2 + \frac{4}{21}$: $b = 2$ et $\frac{4}{21} = \frac{1}{c + \frac{1}{d}}$

Donc $\frac{21}{4} = c + \frac{1}{d}$ et ainsi $c = 5$ et $d = 4$.

Puissances

Ex 5 : Calculer et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$A = \frac{3^3 \times 27}{81^2} = \frac{3^3 \times 3^3}{(3^4)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$B = \frac{4 \times 7^2 - 2^5 \times 3}{4^4 - 4^3} = \frac{4(7^2 - 2^3 \times 3)}{4^3(4-1)} = \frac{(49-24)}{4^2 \times 3} = \frac{25}{48}$$

$$C = \frac{1{,}5 \times 10^4 + 8{,}01 \times 10^5}{2 \times 10^3} = \frac{10^4(1{,}5 + 8{,}01 \times 10)}{2 \times 10^3} = \frac{10(1{,}5 + 80{,}1)}{2} = \frac{816}{2} = 408$$

$$D = \frac{4^{13}}{2^{25}} = \frac{2^{26}}{2^{25}} = 2$$

$$E = \frac{(-4)^3 \times 15^2}{6^3 \times 10^3 \times (-2)^{-2}} = \frac{-(2^2)^3 \times 3^2 \times 5^2 \times (-2)^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^3 \times 5^3} = \frac{-2^8 \times 3^2 \times 5^2}{2^6 \times 3^3 \times 5^3} = \frac{-2^2}{3 \times 5} = \frac{-4}{15}$$

$$F = \frac{-2^{-4} \times (-3)^5 \times 10^5}{9^4 \times 25^3} = \frac{3^5 \times 2^5 \times 5^5}{2^4 \times 3^8 \times 5^6} = \frac{2}{3^3 \times 5} = \frac{2}{135}$$

Ex 6 : Simplifier les expressions :

$$A = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

$$B = 2^n - 2^{n-2} = 2^{n-2}(2^2 - 1) = 3 \times 2^{n-2}$$

$$C = \frac{3^n}{3^{-n}} = 3^{2n}$$

$$D = \frac{4^n}{2^{2n-1}} = \frac{2^{2n}}{2^{2n-1}} = 2$$

$$E = \left(a^{n^2}\right)^2 = a^{2n^2}$$

$$F = a^{3n}(a^n)^3 = a^{3n}a^{3n} = a^{6n}$$

$$G = (a^n)^n = a^{n^2}$$

$$H = 8^{n+1} - 4^n \times 2^{n+2} = 2^{3n+3} - 2^{3n+2} = 2^{3n+2}(2-1) = 2^{3n+2}$$

$$I = (-1)^{2n+1} = -1$$

$$J = (-1)^{2n} = 1$$

$$K = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$$

$$L = \frac{a^{n^2}}{a^n} = a^{n^2-n}$$

$$M = (-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n+1} = (-1)^{3n} = (-1)^n$$

$$N = \frac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n-1}(-1-1)}{1-(-1)} = \frac{-2(-1)^{n-1}}{2} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$$

Ex 7 : Soit $n \in \mathbb{N}$. En partant du membre de gauche, montrer que :

1. $3^n - 6^n = 6^n\left(\frac{3^n}{6^n} - 1\right) = 6^n\left(\left(\frac{3}{6}\right)^n - 1\right) = 6^n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$

2. $\frac{9}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^n = 4 \times \frac{3^2}{4^2} \times \frac{4^n}{3^n} = 4 \times \frac{4^{n-2}}{3^{n-2}} = 4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$

3. $\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

4. $\frac{2 \times 4^n + (-2)^n}{2 \times 4^n - (-2)^n} = \frac{4^n\left(2 + \frac{(-2)^n}{4^n}\right)}{4^n\left(2 - \frac{(-2)^n}{4^n}\right)} = \frac{2 + \left(\frac{-2}{4}\right)^n}{2 - \left(\frac{-2}{4}\right)^n} = \frac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

Racines

Ex 8 : Simplifier $\sqrt{28\,812}$ et $\sqrt{118\,800}$.

$$\sqrt{28\,812} = \sqrt{2 \times 2 \times 7\,203} = 2\sqrt{3 \times 2\,401} = 2\sqrt{3 \times 7 \times 343} = 2\sqrt{3 \times 7 \times 7 \times 49} = 2 \times 7 \times 7\sqrt{3} = 98\sqrt{3}$$

$$\sqrt{118\,800} = \sqrt{100 \times 1\,188} = 10\sqrt{11 \times 100 + 11 \times 8} = 10\sqrt{11 \times 108} = 10\sqrt{11 \times 2 \times 54} = 10\sqrt{11 \times 2 \times 9 \times 2 \times 3} = 10 \times 2 \times 3\sqrt{33} = 60\sqrt{33}$$

Ex 9 : On pose $A = \sqrt{4-\sqrt{7}} + \sqrt{4+\sqrt{7}}$ et $B = \sqrt{8-\sqrt{15}} - \sqrt{8+\sqrt{15}}$.

$$A^2 = \left(\sqrt{4-\sqrt{7}} + \sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2 = 4 - \sqrt{7} + 2\sqrt{4-\sqrt{7}}\sqrt{4+\sqrt{7}} + 4 + \sqrt{7}$$

$$B^2 = \left(\sqrt{8-\sqrt{15}} - \sqrt{8+\sqrt{15}}\right)^2$$

$= 8 + 2\sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}$
$= 8 + 2\sqrt{16-7}$
$= 8 + 2\sqrt{9}$
$= 8 + 2 \times 3$
$= 14$
$A = \sqrt{14}$ car $A > 0$

$= 8 - \sqrt{15} - 2\sqrt{8-\sqrt{15}}\sqrt{8+\sqrt{15}} + 8 + \sqrt{15}$
$= 16 - 2\sqrt{(8-\sqrt{15})(8+\sqrt{15})}$
$= 16 - 2\sqrt{64-15}$
$= 16 - 2\sqrt{49}$
$= 16 - 2 \times 7$
$= 2$
$B = -\sqrt{2}$ car $B < 0$ ⚠

Ex 10 : Simplifier les écritures des réels suivants :

$A = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2$
$= 4 \times 3 - 12\sqrt{6} + 9 \times 2$
$= 30 - 12\sqrt{6}$

$B = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$
$= 9 \times 2 - 4 \times 3$
$= 6$

$C = \left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right)$
$= 4x^2 + 1 - 4x^2 = 1$

$D = \sqrt{(-2-3x^2)^2}$
$= |-2-3x^2| = 2 + 3x^2$

⇨ On a $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = a + b + 2\sqrt{ab}$

$E^2 = 7 + 4\sqrt{3}$
$= 7 + 2\sqrt{12}$
D'où $a + b = 7$ et $ab = 12$
On a $a = 4$ et $b = 3$
Donc $E = 2 + \sqrt{3}$

$F^2 = 13 + 4\sqrt{10}$
$= 13 + 2\sqrt{40}$
D'où $a + b = 13$ et $ab = 40$
On a $a = 5$ et $b = 8$
Donc $F = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

$G^2 = 88 + 32\sqrt{6}$
$= 88 + 2\sqrt{16^2 \times 6}$
D'où $a + b = 88$ et $ab = 16^2 \times 6$
On va résoudre $x^2 - 88x + 16^2 \times 6 = 0$
Donc $G = 8 + \sqrt{24} = 8 + 2\sqrt{6}$

$\Delta = 88^2 - 4 \times 16^2 \times 6$
$= 8^2 \times 11^2 - 4 \times 8^2 \times 2^2 \times 6$
$= 8^2(121 - 96) = 8^2 \times 25$
$x_1 = \frac{88 - 8 \times 5}{2} = \frac{48}{2} = 24$
$x_2 = \frac{88 + 8 \times 5}{2} = \frac{128}{2} = 64$

Ex 11 : Ecrire sans racine au dénominateur :

$A = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
$= \frac{\sqrt{3}+3}{3}$

$B = \frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
$= \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$
$= \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}$
$= 5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$C = \frac{\sqrt{10}}{2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$
$= \frac{\sqrt{10}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$
$= \frac{\sqrt{50}-\sqrt{20}}{2(5-2)}$
$= \frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{6}$

$D = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
$= \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2}$
$= 5 - 2\sqrt{6}$

$E = \frac{1+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$
$= \frac{(1+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$
$= \frac{3+\sqrt{2}+6\sqrt{2}+2\times 2}{9-2}$
$= \frac{7+7\sqrt{2}}{7} = 1 + \sqrt{2}$

Equations - Inéquations

Ex 12 : Résoudre l'inéquation $4x^4 - 140x^2 + 325 \leq 0$

On pose $X = x^2$: $4X^2 - 140X + 325 \leq 0$

$\Delta = (-140)^2 - 4 \times 4 \times 325$
$= 19\,600 - 5\,200$
$= 14\,400$
$= 12^2 \times 10^2$
$= 120^2$

$X_1 = \frac{140-120}{2\times 4}$ et $X_2 = \frac{140+120}{2\times 4}$
$= \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ $= \frac{260}{8} = \frac{65}{2}$

D'où $X \in \left[\frac{5}{2} ; \frac{65}{2}\right]$

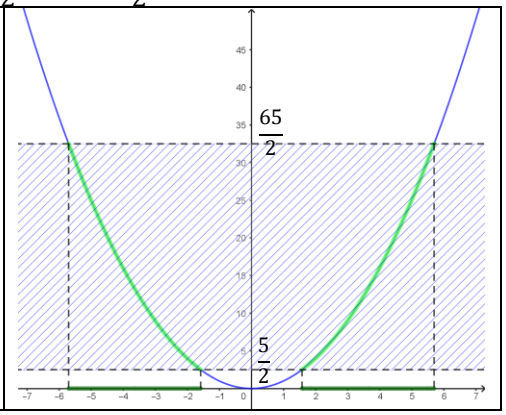
Autrement dit, $\frac{5}{2} \leq X \leq \frac{65}{2}$ c'est à dire $\frac{5}{2} \leq x^2 \leq \frac{65}{2}$

Une bonne connaissance de la fonction carré permet de répondre directement : voir ci-contre…

Or, $\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\sqrt{\frac{65}{2}} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{130}}{2}$

$S = \left[-\frac{\sqrt{130}}{2} ; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{10}}{2} ; \frac{\sqrt{130}}{2}\right]$



Ex 13 : 1. Résoudre l'équation $\sqrt{5x^2 + 3x - 5} = 2x + 1$
2° Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} = 5$

1° On passe au carré :
$5x^2 + 3x - 5 = (2x+1)^2$
$5x^2 + 3x - 5 = 4x^2 + 4x + 1$
$x^2 - x - 6 = 0$
-2 est une racine évidente.
Et le produit des racines vaut $\frac{-6}{1}$ donc la seconde racine est 3.
Youpi ! Sauf que…

$\sqrt{5 \times (-2)^2 + 3 \times (-2) - 5} = \sqrt{20 - 6 - 5} = \sqrt{9} = 3$
$2 \times (-2) + 1 = -3$
Donc -2 n'est en fait pas une solution…

D'où vient le problème ? Le passage au carré n'est pas une équivalence : résoudre $A^2 = B^2$ n'est pas équivalent à résoudre $A = B$. Cela n'est vrai que si A et B sont de mêmes signes.
Avant de passer au carré, il faut donc vérifier que…
Or, $\sqrt{5x^2 + 3x - 5}$ est positif donc il faut que $2x + 1$ le soit aussi.
$2x + 1 \geq 0$ donne $x \geq \frac{-1}{2}$
Et la « solution » $x = -2$ ne vérifie pas ça.
Autre solution : on passe au carré, on sait que ce n'est pas équivalent et donc … on pense à vérifier les solutions potentielles qu'on obtient à la fin.

Remarque : fallait-il vérifier que $5x^2 + 3x - 5 \geq 0$ pour que la racine carrée soit bien définie ? Pas nécessairement dans ce cas précis, car le passage au carré donne $5x^2 + 3x - 5 = (2x + 1)^2$ ce qui justifie a posteriori les choses.
Pour autant c'est bien de le faire en temps normal 😊

2° Cette équation est définie si $x + 1 \geq 0$ et $x + 4 \geq 0$.
Autrement dit, $x \in [-1\,;\, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} = 5 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}\right)^2 = 5^2 \\
&\Leftrightarrow x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(x+4)} + x + 4 = 25 \\
&\Leftrightarrow 2x + 5 + 2\sqrt{(x+1)(x+4)} = 25 \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(x+4)} = 20 - 2x \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+4)} = 10 - x \\
&\Leftrightarrow (x+1)(x+4) = (10-x)^2 \text{ car } 10 - x \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 4x + x + 4 = 100 - 20x + x^2 \\
&\Leftrightarrow 25x = 96 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{96}{25} = 3{,}84
\end{aligned}$$

Ex 14 : En fait, on a une sorte de démonstration par l'absurde.
SI l'équation initiale a des solutions dans $\mathbb{R}$, alors bla bla bla.
Et donc la seule racine réelle potentielle serait 1.
Or, 1 ne convient pas donc … on vient de prouver que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle. 😊