SÉRIES

I Définitions

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Considérons la suite (S_n) définie par $\forall n \geq 0, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

La question légitime que l'on peut se poser est de savoir si cette suite converge.

On définit la série de terme général u_n que l'on note $\sum u_n$ comme étant cette suite (S_n)

S_n est appelée « somme partielle de rang n » de la série.

Etudier la série $\sum u_n$, c'est étudier la nature de la suite (S_n) (convergence ou divergence) :

- si (S_n) converge vers un réel S, on dit que la série $\sum u_n$ converge et on appelle S la somme de la série. On peut alors noter $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$
- sinon on dit que la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque : le 1er indice peut être différent de 0…

Ex : Calculons les sommes partielles de la série $\sum k$

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} k = 0 \qquad S_1 = \sum_{k=0}^{1} k = 1 \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{2} k = 1+2 = 3 \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{3} k = 1+2+3 = 6$$

⇒ cette série diverge : $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Ex : Calculons les sommes partielles de la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

⇒ on peut montrer que cette série diverge (critère de Riemann)

Des résultats étonnants :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots = 1$$ *(on le démontrera plus tard)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$ *(problème de Bâle, fonction zêta de Riemann)*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \ln 2$$ *(série harmonique alternée)*



On ne peut pas écrire de somme infinie sans préalablement avoir démontré qu'elle existe !

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

$$= 1 - A$$

D'où $2A = 1$ et donc $A = \frac{1}{2}$

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k$$

$$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

$$= 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + \dots)$$

$$= 1 + 2S$$

D'où $-1 = 2S - S$ et donc $S = -1$

Bizarrerie : reprenons le 1er contre-exemple : $A = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = \frac{1}{2}$

Et surtout continuons à nous amuser à partir de là :

$$B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots$$
$$= 1 - (\ 2 \quad -3 \quad +4 \quad -5 \quad +6 \quad -7 \quad - \dots)$$
$$= 1 - (\overbrace{1+1}\overbrace{-2-1}\overbrace{+3+1}\overbrace{-4-1}\overbrace{+5+1}\overbrace{-6-1} - \dots)$$
$$= 1 - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots) - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$
$$= 1 - B - A$$

D'où $B + B = 1 - A = 1 - \frac{1}{2}$

$$2B = \frac{1}{2} \text{ et donc } B = \frac{1}{4}$$

Posons alors $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$

$$S - B = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots)$$
$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots$$
$$= 2 + 4 + 6 + \dots + 2 + 4 + 6 + \dots$$
$$= 2(2 + 4 + 6 + 8 + \dots)$$
$$= 2 \times 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots)$$
$$= 4S$$

D'où $-B = 4S - S$

$$\frac{-1}{4} = 3S$$

$$S = \frac{-1}{12}$$

Autrement dit, on vient de « prouver » que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots = \frac{-1}{12}$

Ces manipulations non justifiées peuvent aboutir à des résultats absurdes...

Sauf que … si on respecte quelques règles élémentaires, quelle que soit la manière de s'y prendre, on finira toujours par obtenir que cette somme vaut $\frac{-1}{12}$.

Mais plus étonnant : dans certains problèmes de physique dans lesquels cette somme apparaît, si on la remplace par $\frac{-1}{12}$ alors … ça fonctionne ! 🤯

Tout ça pour dire que les sommes infinies, c'est vraiment un objet très particulier / délicat…



A ce stade, la méthode la plus naturelle pour étudier la nature d'une série reste d'étudier la limite d'une suite, et donc plus précisément la limite des sommes partielles.

Ex : étudier la convergence de la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ pour $k \geq 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2(1 - 0) = 2$

La série converge donc et on peut écrire $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$



$\sum u_n$, $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sont des objets de nature différente :

↪ $\sum u_n$ représente une série : ce n'est pas un nombre réel mais un objet plus abstrait *(parfois notée $\sum_{n \geq 0} u_n$)*

⇨ Une série peut converger ou diverger, et c'est tout.

↪ $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est un réel pour n fixé *(c'est ce qu'on appelle une somme partielle)*

⇨ On peut donc calculer ce réel.

↪ $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ désigne une somme réelle à condition d'avoir préalablement démontré que la série converge.

⇨ Lorsque c'est le cas, c'est donc une limite finie, c'est-à-dire un réel.

II Séries usuelles

0° Séries télescopiques

Forcément, on ne pouvait pas ne pas en parler : si les sommes partielles sont des sommes télescopiques, une fois calculées, il suffit de passer à la limite quand n tend vers $+\infty$.

Ex : Etudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2(n+1)^2}, n \geq 1$.

On pourra utiliser le résultat suivant : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

On sait que $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n+1} + \frac{d}{(n+1)^2}$

Mais ici, on peut être astucieux :

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2} - 2 \times \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} - 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 2 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{1^2} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{1}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1} - 3$$

Or, $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série convergente, et $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1}$ convergent.

Ainsi, $\sum \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = 2 \times \frac{\pi^2}{6} + 0 + 0 - 3 = \frac{\pi^2}{3} - 3$

Ex : Etudier la convergence de la série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ pour $n \geq 2$.

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$$

$$= \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln n$$

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln k$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \ln k + \sum_{k=3}^{n+1} \ln k - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \ln k + \ln 1 - \ln n + \sum_{k=2}^{n} \ln k - \ln 2 + \ln(n+1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k)$$

$$= \ln(n+1) - \ln n - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln 2$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

Ainsi, $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$

1° Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

La série $\sum q^n$ est appelée série géométrique de raison q.

La série $\sum nq^{n-1}$ est appelée série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison q.

La série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ est appelée série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison q.

Remarque : elles sont ainsi nommées car $(x^n)' = nx^{n-1}$ et $(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$

Propriété : Ces séries convergent si et seulement si $|q| < 1$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

↪ *Noter que* $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$ *et* $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}$

Remarque : les deux dernières formules sont faciles à retrouver car il s'agit des dérivées de la première…

En effet, $\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)' = \frac{2}{(1-q)^3}$

Preuve : on a $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ ssi $|q| < 1$. D'où la première formule.

Notons ensuite $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1$.

$$S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$$

Or, si $|x| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nx^n = 0$ par croissances comparées *(cf fin de chapitre)*

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + 1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$ ce qui donne bien la seconde formule.

Ex : justifier la convergence des séries suivantes, et calculer leur somme.

① $\sum \frac{4}{3^n}$

On a $\frac{4}{3^n} = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$: on reconnaît le terme général d'une série géométrique convergente car $-1 < \frac{1}{3} < 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$$
$$= 4 \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$
$$= 4 \times \frac{1}{\frac{2}{3}} = 4 \times \frac{3}{2}$$
$$= 6$$

② $\sum \frac{3^{n+2}}{5^{2n}}$

On a $\frac{3^{n+2}}{5^{2n}} = \frac{3^n \times 3^2}{(5^2)^n} = 9 \times \left(\frac{3}{25}\right)^n$: on reconnaît le terme général d'une série géométrique convergente car $-1 < \frac{3}{25} < 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^{k+2}}{5^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} 9 \times \left(\frac{3}{25}\right)^k$$
$$= 9 \times \frac{1}{1-\frac{3}{25}}$$
$$= 9 \times \frac{1}{\frac{22}{25}} = 9 \times \frac{25}{22}$$
$$= \frac{225}{22}$$

③ $\sum \frac{n(n-1)}{2^{n+2}}$

On a $\frac{n(n-1)}{2^{n+2}} = n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$
$$= n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= \frac{1}{16} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 2 convergente car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

④ $\sum \frac{n+1}{3^{n-2}}$

On a $\frac{n+1}{3^{n-2}} = \frac{n}{3^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}}$
$$= n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$
$$= 3n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 9\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

On reconnaît la somme des termes généraux de séries géométriques et dérivée d'ordre 1 convergentes car $-1 < \frac{1}{3} < 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{2^{n+2}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{16}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$=\frac{1}{16}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}$$
$$=\frac{1}{16}\times\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$
$$=\frac{1}{16}\times 16$$
$$=1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^{n-2}}=\sum_{k=0}^{+\infty}3n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+9\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$
$$=3\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}+9\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=3\times\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}+9\times\frac{1}{\frac{2}{3}}$$
$$=3\times\frac{9}{4}+9\times\frac{3}{2}$$
$$=\frac{81}{4}$$

Exercice : justifier la convergence de la série $\sum\frac{n^2}{3^n}$

On a $\frac{n^2}{3^n}=\frac{n(n-1)+n}{3^n}$

$=\frac{n(n-1)}{3^n}+\frac{n}{3^n}$

$=n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n+n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$=n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{9}n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

On reconnaît les termes généraux des séries géométriques dérivée d'ordre 1 et 2 convergentes car

$-1<\frac{1}{3}<1$

2° Séries exponentielles

Soit $x\in\mathbb{R}$.

La série $\sum\frac{x^n}{n!}$ est appelée série exponentielle de paramètre x.

Propriété : Cette série converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On a alors : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$

Attention : la somme commence à $k=0$ et pas à $k=1$.

La preuve est basée sur deux notions.
Absolue convergence : c'est lorsque $\sum|u_n|$ converge. Et si une série converge absolument, alors elle converge.
Critère de d'Alembert : on note $\ell=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

Si $\ell<1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
Si $\ell>1$ (ou tend vers $+\infty$), la série diverge.
Si $\ell=1$, le critère ne permet pas de conclure.

Ex : justifier la convergence des séries suivantes, et calculer leur somme.

① $\sum \frac{(-1)^k}{k!}$

On reconnaît la série exponentielle de paramètre (-1).

D'où $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

② $\sum \frac{1}{k!}$

On reconnaît la série exponentielle de paramètre 1 car $\frac{1}{k!} = \frac{1^k}{k!}$

D'où $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e^1 = e$

③ $\sum \frac{2^k}{(k+1)!}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{k-1}}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k!} \times 2^{-1}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k!}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} - 1 \right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} - \frac{1}{2}$$

On reconnaît la série exponentielle de paramètre 2.

D'où $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$

④ $\sum \frac{k3^{k+2} + 1}{k!}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k3^{k+2} + 1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k3^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k3^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+2}}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^{k+3}}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= 27 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

On reconnaît la série exponentielle de paramètre 3 et de paramètre 1.

D'où $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k3^{k+2} + 1}{k!} = 27e^3 + e = e(27e^2 + 1)$

Exercice : justifier la convergence de la série $\sum \frac{3k^2 - 2}{k!}$ et calculer sa somme.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{3k^2 - 2}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{3k(k-1) + 3k - 2}{k!}$$
$$= 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= 3 \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + 3 \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= 3 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + 3 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$= 3 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + 3 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

On reconnaît la série exponentielle de paramètre 1

D'où $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3k^2 - 2}{k!} = 3e + 3e - 2e = 4e$

Remarque : si on avait eu $\sum_{k\geq 1}\frac{k^2}{(k-1)!}$ alors $k^2=k(k-1)+k$ n'aurait pas été optimal…

$$\begin{aligned}\frac{k^2}{(k-1)!}&=\frac{k(k-1)+k}{(k-1)!}\\&=\frac{k(k-1)}{(k-1)!}+\frac{k}{(k-1)!}\\&=\frac{k}{(k-2)!}+\frac{k-1+1}{(k-1)!}\\&=\frac{k-2+2}{(k-2)!}+\frac{k-1}{(k-1)!}+\frac{1}{(k-1)!}\\&=\frac{k-2}{(k-2)!}+\frac{2}{(k-2)!}+\frac{1}{(k-2)!}+\frac{1}{(k-1)!}\\&=\frac{1}{(k-3)!}+\frac{3}{(k-2)!}+\frac{1}{(k-1)!}\end{aligned}$$

Alors que $k^2=(k-1)(k-2)+3k-2$

$$=(k-1)(k-2)+3(k-1)+3-2$$

$$=(k-1)(k-2)+3(k-1)+1$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(k-1)!}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(k-2)+3(k-1)+1}{(k-1)!}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(k-2)}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{3(k-1)}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\\&=\sum_{k=3}^{n}\frac{(k-1)(k-2)}{(k-1)!}+3\sum_{k=2}^{n}\frac{(k-1)}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\\&=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-3)!}+3\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\\&=\sum_{k=0}^{n-3}\frac{1}{k!}+3\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

On reconnaît la série exponentielle de paramètre 1

D'où $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^2}{(k-1)!}=e+3e+e=5e$

3° Séries de Riemann

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

La série $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ est appelée série de Riemann de paramètre α (pour $n\geq 1$).

Propriété : Cette série converge si et seulement si $\alpha>1$.

⇨ Théorème de référence, très utilisé dans le cadre des comparaisons des séries à termes positifs.

$$\sum\frac{1}{n}\text{ et }\sum\frac{1}{\sqrt{n}}\text{ divergent}$$

$$\sum\frac{1}{n^2}\text{ et }\sum\frac{1}{n\sqrt{n}}\text{ convergent}$$

COMPLÉMENT

Propriété : $\lim\limits_{n\to+\infty} nq^n = 0$ pour $|q| < 1$

Preuve : Si $q = 0$, c'est trivial.

Supposons que $0 < |q| < 1$.

On peut écrire $|q| = \dfrac{1}{1+a}$ avec $a > 0$

On a alors $|nq^n| = n|q|^n = \dfrac{n}{(1+a)^n}$

D'après la formule du binôme de Newton, on a $(1+a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, 1^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$$

Or, tous les termes de cette somme sont positifs.

D'où $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \geq \binom{n}{2} a^2$ *(on peut dire que $n \geq 2$ car $n \to +\infty$)*

Autrement dit, $(1+a)^n \geq \dfrac{n(n-1)}{2} a^2 \geq 0$

$$\frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2} a^2}$$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$$\frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{n(n-1)a^2}$$

$$\frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{2n}{n(n-1)a^2}$$

$$0 \leq \frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{2}{(n-1)a^2}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{(1+a)^n} = 0$

Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n|q|^n = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nq^n = 0$

Autre preuve : $q^n = e^{n \ln q}$ si $q > 0$ puis croissances comparées et traitement de $q < 0$ via $|q|$…