# SOMMES TÉLESCOPİQUES

## I Définition

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ est une somme télescopique si on peut écrire $a_k = b_{k+1} - b_k$

On a alors en effet : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} b_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1} - b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$= b_{n+1} - b_1$$

Ex : Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1).k!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k+1).k! - k!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k!$$

$$= (n+1)! - 1!$$

Ex : Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

$$= \sqrt{n+1} - \sqrt{1}$$

⇨ En pratique, on fera quasi systématiquement la preuve du télescopage, contrairement à ces deux exemples simples donc…

Exercice : 1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

1. $$\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} = \frac{(k+1)(k+2) - 2k(k+2) + k(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{k^2 + 2k + k + 2 - 2k^2 - 4k + k^2 + k}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

2. $$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$
d'après 1°
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}$$
par linéarité
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$$
décalages d'indices
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$$
séparation des premiers / derniers termes
$$= \frac{1}{1} + \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n+1} - 2\left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}\right) - \frac{1}{2} + \left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i}\right) + \frac{1}{n+2}$$
télescopage
$$= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2) - 2(n+2) + 2(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n^2 + 2n + n + 2 - 2n - 4 + 2n + 2}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n^2 + 3n}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

Pour ce genre d'exercice classique, la clé est la question 1. : comment obtenir la décomposition proposée qu'on appelle une…

## II Décomposition en éléments simples

### 1° Partie entière

Soit $F$ une fonction rationnelle, c'est-à-dire quotient de deux fonctions polynômes.

Si $F = \frac{P}{Q}$, on appelle degré de $F$ et on note $\deg F$ la valeur définie par $\deg F = \deg P - \deg Q$.

Il existe une unique décomposition de $F$ sous la forme $F = E + G$ où $E$ est une fonction polynôme de degré égal au degré de $F$ ($E = 0$ si $\deg F < 0$), et $G$ une fonction rationnelle avec $\deg G < 0$. Le polynôme $E$ est appelé partie entière de $F$ : il est égal au quotient de la division euclidienne de $P$ par $Q$.

Ex : déterminer la partie entière des fonctions rationnelles suivantes.

$F_1 = \frac{x}{x^2-4}$ : la partie entière est $0$ car $\deg F = -1 < 0$

$$F_2 = \frac{x^5+1}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^5+1}{x(x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{x^5+1}{x^3-2x^2+x}$$

$$\begin{array}{l|l} x^5+1 & x^3-2x^2+x \\ \underline{x^5-2x^4+x^3} & x^2+2x+3 \\ 2x^4-x^3+1 & \\ \underline{2x^4-4x^3+2x^2} & \\ 3x^3-2x^2+1 & \\ \underline{3x^3-6x^2+3x} & \\ 4x^2-3x+1 & \end{array}$$

La partie entière est $x^2+2x+3$.

Et donc $F_2 = (x^2+2x+3) + \frac{4x^2-3x+1}{x(x-1)^2}$

⇨ En pratique, dans des cas « simples » et avec un peu d'astuce, on peut parfois déterminer la partie entière d'une fonction rationnelle sans effectuer la division euclidienne

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{2x}{3x+5} = \frac{2}{3} \times \frac{3x}{3x+5}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3x+5-5}{3x+5}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3x+5}{3x+5} - \frac{5}{3x+5}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{5}{3x+5}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{3x+5}$$

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x+1)x - x}{x+1}$$

$$= x - \frac{x}{x+1}$$

$$= x - \frac{x+1-1}{x+1}$$

$$= x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}$$

$$= x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

**2° Partie rationnelle**

Une fois la partie entière séparée, il reste à déterminer la fonction rationnelle de degré négatif $G$.

1ère étape : décomposer le dénominateur de $G$ en produit de polynômes irréductibles.

On peut avoir des polynômes de degré 1 de multiplicité $n$ : $(x-a)^n$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

*(un même facteur peut apparaître plusieurs fois, d'où la puissance n)*

Dans la décomposition en éléments simples de $G$, on va alors trouver :

$$\frac{a_1}{x-a} + \frac{a_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(x-a)^n} \text{ où } \forall i \in [\![1\,;n]\!], a_i \in \mathbb{R}$$

Et si on est dans $\mathbb{R}$, on peut avoir des polynômes de degré 2 avec $\Delta < 0$ : $(ax^2+bx+c)^n$

Dans la décomposition en éléments simples de $G$, on va alors trouver :

$$\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c} + \frac{a_2x+b_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{a_nx+b_n}{(ax^2+bx+c)^n} \text{ où } \forall i \in [\![1\,;n]\!], (a_i,b_i) \in \mathbb{R}^2$$

Ex : déterminer la forme des décompositions en éléments simples de :

$$F_1 = \frac{5x-1}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$$

$$F_2 = \frac{7x+4}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2}$$

$$F_3 = \frac{5}{(x+4)(x-1)^2}$$

$$= \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$F_4 = \frac{3x+1}{(x+6)(x^2+1)}$$

$$= \frac{a}{x+6} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$$F_5 = \frac{3x^2-5x+1}{(x-5)^3(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{a}{x-5} + \frac{b}{(x-5)^2} + \frac{c}{(x-5)^3} + \frac{dx+e}{x^2+5} + \frac{fx+g}{(x^2+5)^2}$$

2ème étape : déterminer tous les coefficients…
Il existe pour ce faire diverses techniques : nous ne passerons en revue que les principales.

① L'identification des coefficients

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

$$= \frac{a(x+2)+b(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{ax+2a+bx-2b}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{(a+b)x+2a-2b}{(x-2)(x+2)}$$

Il faut donc que $\begin{cases} a+b=1 \\ \square \\ 2a-2b=0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a+b=1 \\ \square \\ a-b=0 \end{cases}$

$L_1 + L_2$ : $2a = 1$ et donc $a = \frac{1}{2}$.

Et $L_2$ donne $a = b$…

② Multiplier la décomposition prévue par l'un des facteurs du dénominateur avec son exposant maximal, puis faire tendre $x$ vers la valeur interdite associée.

Ex 1 : Reprenons l'exemple précédent : $\frac{x}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$

On multiplie par $x-2$ : $\frac{x}{x+2} = a + \frac{b(x-2)}{x+2}$

On passe à la limite quand $x$ tend vers $2$ : $\frac{2}{2+2} = a + \frac{b(2-2)}{2+2}$

$\frac{2}{4} = a = \frac{1}{2}$ *cela revient à remplacer x par 2 puisque ce n'est plus une valeur interdite…*

On multiplie par $x+2$ : $\frac{x}{x-2} = \frac{a(x+2)}{x-2} + b$

On passe à la limite quand $x$ tend vers $-2$ : $\frac{-2}{-2-2} = \frac{a(-2+2)}{-2-2} + b$

$\frac{-2}{-4} = b = \frac{1}{2}$

Donc $\frac{x}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} = \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$

Ex 2 : $\dfrac{3x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2}$

On multiplie par $(x-1)^2$ : $3x+1 = a(x-1)+b$

On passe à la limite quand $x$ tend vers $1$ : $3\times 1+1 = a(1-1)+b$

$4 = b$

Donc $\dfrac{3x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

D'où $\dfrac{3x+1}{(x-1)^2} - \dfrac{4}{(x-1)^2} = \dfrac{a}{x-1}$

$\dfrac{3x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{a}{x-1}$

$\dfrac{3(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{a}{x-1}$

$\dfrac{3}{x-1} = \dfrac{a}{x-1}$

Et donc $a = 3$

Donc $\dfrac{3x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

③ Remplacer $x$ par une valeur.

En le faisant plusieurs fois, on obtient un système d'équations : fastidieux, mais cela peut être une bonne méthode complémentaire...

Reprenons par exemple, lorsqu'on en est là : $\dfrac{3x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

Avec $x = 2$, on obtient $\dfrac{3\times 2+1}{(2-1)^2} = \dfrac{a}{2-1} + \dfrac{4}{(2-1)^2}$

$7 = a+4$

$a = 3$

Autres considérations possibles : parité / imparité, passage (provisoire) par les nombres complexes…

Prenons par exemple $f(x) = \dfrac{10x}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$

On peut remarquer que $f$ est impaire : $f(-x) = -f(x)$.

Autrement dit, $\dfrac{a}{-x-1} + \dfrac{b}{-x+1} = \dfrac{-a}{x-1} + \dfrac{-b}{x+1}$

$\dfrac{-b}{x-1} + \dfrac{-a}{x+1} = \dfrac{-a}{x-1} + \dfrac{-b}{x+1}$ et donc $a = b$