SOMMES

I Généralités

1° Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ se note $\sum_{k=1}^{n} x_k$.

1. La lettre k s'appelle l'indice de sommation.

   Les valeurs 1 et n sont les bornes de la somme.

   La borne inférieure peut être différente de 1 ; et elle peut même être négative…
   Et si la borne inférieure est strictement supérieure à la borne supérieure, la somme vaut 0 par convention.

2. La lettre indice est dite muette : $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i$

3. $\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{p \le k \le n} x_k = \sum_{k \in [\![p\,;n]\!]} x_k$

Pour calculer une somme, on remplace l'indice de sommation par les valeurs successives allant de la borne inférieure à la borne supérieure.

Ex : Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\sum_{i=3}^{5} 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 = 8 + 16 + 32 = 56$$

$$\sum_{j=5}^{11} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$$

$$\sum_{k=4}^{4} a_k = a_4$$

Proposition : Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \le n$. Le nombre de termes de $\sum_{k=p}^{n} x_k$ est $n - p + 1$

Conséquence : Si $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=p}^{n} a = (n - p + 1)a$

2° Sommes usuelles

Somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\sum u_k = \text{Nbre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$$

Cas particulier :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum u_k = 1^{\text{er}}\text{terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nbre de termes}}}{1 - q}, q \neq 1$$

Cas particulier :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Autres sommes usuelles :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

⇨ Les preuves peuvent se faire par récurrence.

II Propriétés du symbole Σ

1° Linéarité

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k \quad \textit{(découpage du terme général)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a x_k = a \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \textit{(factorisation par a)}$$

Ex : Calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \quad \textit{par linéarité}$$

$$= 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1)(n+1)$$

$$= (n+1)^2$$

On aurait pu reconnaître la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

$$\sum_{k=0}^{n} k(2k+1) = \sum_{k=0}^{n} 2k^2 + k$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k$$

$$= 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)[2(2n+1)+3]}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

2° Relation de Chasles

Soit m et n des entiers tels que $m < n$.

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{n} x_k$$

Conséquences :

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) + x_{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{m-1} x_k$$

Ex : $$\sum_{k=20}^{100} k = \sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{19} k$$

$$= \frac{100(100+1)}{2} - \frac{19(19+1)}{2}$$

$$= 50 \times 101 - 19 \times 10$$

$$= 5\,050 - 190$$

$$= 4\,860$$

Ex : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 2^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1}$$

$$= u_n + 2^{n+1}$$

3° Décalage d'indice

Soit n et p tels que $p \leq n$ et m un entier positif ou négatif. $\sum_{k=p}^{n} x_{k+m} = \sum_{j=p+m}^{n+m} x_j$

On dit qu'on a effectué le décalage d'indice $j = k + m$.

Preuve : il suffit de développer la somme

$$\sum_{k=p}^{n} x_{k+m} = x_{p+m} + x_{p+1+m} + \ldots + x_{n-1+m} + x_{n+m}$$

$$= x_{p+m} + x_{p+m+1} + \ldots + x_{n+m-1} + x_{n+m}$$

$$= \sum_{j=p+m}^{n+m} x_j$$

Concrètement, on pose $j = k + m$ c'est-à-dire $k = j - m$ puis :

- dans le terme générique, on remplace les k par des $j - m$
- la borne inférieure $k = p$ devient $j = p + m$
- la borne supérieure $k = n$ devient $j = n + m$

⇨ On utilisera souvent les décalages d'indices pour faire apparaître des sommes usuelles ou pour faire ce qu'on appelle du « télescopage »

Ex : effectuer le calcul suivant :

$$\sum_{k=2}^{n}(k-2)^2 = \sum_{j=0}^{n-2} j^2$$

On pose $j = k - 2$: si $k = 2$ alors $j = 2 - 2 = 0$; si $k = n$ alors $j = n - 2$

$$= \frac{(n-2)(n-2+1)(2(n-2)+1)}{6}$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$$

$$\sum_{k=3}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=3}^{n} k^2 = \sum_{k=4}^{n+1} k^2 - \sum_{k=3}^{n} k^2$$

On pose $j = k + 1$: si $k = 3$ alors $j = 3 + 1 = 4$; si $k = n$ alors $j = n + 1$

$$= \sum_{k=3}^{n} k^2 - 3^2 + (n+1)^2 - \sum_{k=3}^{n} k^2$$

$$= (n+1)^2 - 3^2$$

$$= (n+1-3)(n+1+3)$$

$$= (n-2)(n+4)$$

Remarque : on peut aussi avoir des décalages d'indice par « retournement »

Soit n tels que $p \leq n$ et m un entier positif ou négatif. $\sum_{k=p}^{n} x_{m-k} = \sum_{j=m-n}^{m-p} x_j$

Même principe que précédemment, mais on inverse les bornes car $m - p \geq m - n$

Ex : effectuer le calcul suivant :

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$