

MATHEMATIQUES N°1

Remarques : une copie commence avec un encart (pour l'appréciation) puis chaque exercice est identifié en écrivant et en soulignant à la règle « Exercice ... ». Les exercices peuvent alors être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 0 : (3 points)

En introduisant une suite judicieusement choisie et en expliquant de manière claire et détaillée la démarche, calculer la somme suivante :

$$S = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 70\,333$$

Exercice 1 : (4 points)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n + 1}$.

Exercice 2 : (4,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{1}{2}u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que $0,5 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : (4,5 points)

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

On rappelle que $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-1}$

Exercice 4 : (4 points)

- Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{5n^2 - 3n + 8}{-1 + 5n - 2n^2}$
- Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{3 - 2\sqrt{n}}{5n - 7}$

Bonus : (+1 points)

- Donner la citation de Jimmy Hendrix qui introduit le cahier de cours.
- Ecrire la définition mathématique de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.
- Donner un exemple de suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = 13$.

MATHEMATIQUES N°1

Remarques : une copie commence avec un encart (pour l'appréciation) puis chaque exercice est identifié en écrivant et en soulignant à la règle « Exercice ... ». Les exercices peuvent alors être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 0 : (3 points)

En introduisant une suite judicieusement choisie et en expliquant de manière claire et détaillée la démarche, calculer la somme suivante :

$$S = 1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 70\,333$$

Exercice 1 : (4 points)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n + 1}$.

Exercice 2 : (4,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{1}{2}u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que $0,5 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : (4,5 points)

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

On rappelle que $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-1}$

Exercice 4 : (4 points)

- Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{5n^2 - 3n + 8}{-1 + 5n - 2n^2}$
- Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{3 - 2\sqrt{n}}{5n - 7}$

Bonus : (+1 points)

- Donner la citation de Jimmy Hendrix qui introduit le cahier de cours.
- Ecrire la définition mathématique de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.
- Donner un exemple de suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = 13$.

MATHEMATIQUES N°1

Exercice 0 : (3 points)

On remarque que la progression est arithmétique de raison 4.

On introduit la suite définie par $u_{n+1} = u_n + 4$ et $u_0 = 1$.

On a alors $u_n = 1 + 4n$

$$70\ 333 = 1 + 4n$$

$$70\ 333 - 1 = 4n$$

$$\frac{70\ 332}{4} = n$$

$$n = 17\ 583$$

Autrement dit, $70\ 333 = u_{17\ 583}$

Ainsi, $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{17\ 583}$

$$= 17\ 584 \times \frac{1 + 70\ 333}{2}$$

$$= 618\ 376\ 528$$

Exercice 1 : (4 points)

Initialisation : $n = 0$

$u_0 = 2$ et $\frac{2}{2 \times 0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$: la propriété est vérifiée au rang $n = 0$.

Hérédité : supposons que $u_n = \frac{2}{2n+1}$ pour un certain rang n .

Montrons que $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

$$= \frac{\frac{2}{2n+1}}{1 + \frac{2}{2n+1}} \text{ par HR}$$

$$= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3}$$

$$= \frac{2}{2n+3}$$

Par récurrence, on a donc $u_n = \frac{2}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : (4,5 points)

Initialisation : $n = 1$

$u_1 = 5$ donc $0,5 \leq u_1 \leq 5$.

Hérédité : supposons que $0,5 \leq u_n \leq 5$ pour un certain rang n .

Montrons que $0,5 \leq u_{n+1} \leq 5$.

On a $0,5 \leq u_n \leq 5$ par HR.

$$-\frac{1}{2} \times 0,5 \geq -\frac{1}{2} u_n \geq -\frac{1}{2} \times 5$$

$$3 - 0,25 \geq 3 - \frac{1}{5} u_n \geq 3 - 2,5$$

$$5 \geq 2,75 \geq u_{n+1} \geq 0,5$$

Par récurrence, on a donc $0,5 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : (4,5 points)

Initialisation : $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 k \times 2^{k-1} = 1 \times 2^0 = 1 \text{ et } (1-1)2^1 + 1 = 0 \times 2 + 1 = 1$$

La propriété est vérifiée au rang $n = 1$.

Hérédité : supposons que $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ pour un certain rang n .

Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} = n2^{n+1} + 1$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} &= \underbrace{1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + \dots + n \times 2^{n-1}}_{(n-1)2^n + 1} + (n+1) \times 2^n \\ &= (n-1)2^n + 1 + (n+1) \times 2^n \text{ par HR} \\ &= 2^n(n-1+n+1) + 1 \\ &= 2^n \times 2n + 1 \\ &= n2^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

Par récurrence on a donc $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 4 : (4 points)

$$\begin{aligned} 1. u_n &= \frac{5n^2 - 3n + 8}{-1 + 5n - 2n^2} \\ &= \frac{n^2 \left(5 - \frac{3}{n} + \frac{8}{n^2}\right)}{n^2 \left(-\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n} - 2\right)} \\ &= \frac{5 - \frac{3}{n} + \frac{8}{n^2}}{-\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n} - 2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}
 2. v_n &= \frac{3 - 2\sqrt{n}}{5n - 7} \\
 &= \frac{\sqrt{n} \left(\frac{3}{\sqrt{n}} - 2 \right)}{n \left(5 - \frac{7}{n} \right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\frac{3}{\sqrt{n}} - 2}{5 - \frac{7}{n}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{n}} - 2}{5 - \frac{7}{n}} = \frac{-2}{5} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad (2)$$

Bonus :

1. « La connaissance parle, mais la sagesse écoute » $(+0,25)$

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - 5| < \varepsilon$ $(+0,5)$

3. $u_n = n$ et $v_n = \frac{13}{n}$ $(+0,25)$