

SUITES DE MATRICES COLONNES

Définition : Une suite de matrices est une fonction de $\mathbb{N}$ vers l'ensemble des matrices.

Si ces matrices sont de dimension $m \times 1$, on parle de suite de matrices colonnes. (et si $m = 1 \dots$)

Ex : la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $U_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} + 3 \\ 1 + 0,5^n \end{pmatrix}$ est une suite de matrices colonnes.

Ses coefficients sont les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \frac{2}{n} + 3$ et $v_n = 0,5^n + 1$.

Remarque : une suite de matrices converge si chacun de ses coefficients est une suite convergente.

Ex : La suite (U_n) définie précédemment converge vers $L = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

I Suites de la forme $U_{n+1} = AU_n$

1° La théorie

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de 1^{er} terme u_p où $p \in \mathbb{N}$.

On a alors $u_n = u_p q^{n-p}$ pour tout $n \geq p$.

Propriété : Soit A une matrice carrée de dimension d et soit (U_n) une suite de matrices colonnes de dimension d , de premier terme U_p et telle que $U_{n+1} = AU_n$, $\forall n \geq p$.

On a alors $U_n = A^{n-p}U_p$ pour tout $n \geq p$.

Cas particuliers : $U_n = A^n U_0$ et $U_n = A^{n-1} U_1$



Ce n'est pas $U_n = U_p A^{n-p}$

Preuve : Initialisation : $n = p$

$U_n = U_p$ et $A^{n-p}U_p = A^0U_p = IU_p = U_p$ donc la propriété est vérifiée.

Hérédité : Supposons que $U_n = A^{n-p}U_p$ pour un certain rang n .

Montrons que $U_{n+1} = A^{n+1-p}U_p$

On a $U_{n+1} = AU_n$

$$= AA^{n-p}U_p$$

$$= A^{n+1-p}U_p$$

Par récurrence, on a donc $U_n = A^{n-p}U_p$ pour tout $n \geq p$.

⇒ Finalement, ces suites de matrices colonnes reviennent à calculer des puissances de matrices...

Ex : Soit (U_n) la suite de matrices colonnes vérifiant $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a. Donner l'expression de U_n en fonction de n .

b. La suite (U_n) converge-t-elle ?

1. Initialisation : $n = 0$

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^0 & 0 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1\right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3}(1-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\text{Hérédité : supposons que } A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) & 1 \end{pmatrix} \text{ pour un certain rang } n.$$

$$\text{Montrons que } A^{n+1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \text{ par HR}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 0 & 0 + 0 \\ \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) - \frac{1}{3} & 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, la propriété est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
2. \text{ a. On a } U_n &= A^n U_0 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 0 \\ 6 \times \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) + 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 5 \end{pmatrix} \\
\text{b. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 0 \text{ donc } (U_n) \text{ vers } \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2° Applications

⇒ Suites récurrentes d'ordre supérieur à 1

Ex : on considère la suite (u_n) définie par $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$.

$$\text{Avec } X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}, \text{ on a } X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_{n+1} - 2u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Autrement dit, } X_{n+1} = AX_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{On obtient alors } A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } X_n &= A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4(2^{n+1} - 1) + 2 - 2^{n+1} \\ 4(2^n - 1) + 2 - 2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \times 2^{n+1} - 2 \\ 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Autrement dit, $u_n = 3 \times 2^n - 2$.

Remarque : il s'agit d'une méthode générale. Il existe une méthode plus directe pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou 3, à partir de ce qu'on appelle l'équation caractéristique...

⇒ Systèmes (linéaires) de suites récurrentes

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = 0,7u_n + 0,3v_n \\ v_{n+1} = 0,1u_n + 0,9v_n \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$

- On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
- a. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale.
b. On admet que $A^n = PD^nP^{-1}$ (récurrence). En déduire l'expression de A^n .
- Déterminer les formes explicite de u_n et v_n puis leurs limites éventuelles.

1. Sans problème, $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

2. a. On a $P^{-1} = \frac{1}{1 \times 1 - 1 \times (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -0,6^n & 0,6^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 3 \times 0,6^n & 3 - 3 \times 0,6^n \\ 1 - 0,6^n & 3 + 0,6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3. On a } U_n &= A^n U_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 3 \times 0,6^n & 3 - 3 \times 0,6^n \\ 1 - 0,6^n & 3 + 0,6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 + 6 \times 0,6^n + 30 - 30 \times 0,6^n \\ 2 - 2 \times 0,6^n + 30 + 10 \times 0,6^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 32 - 24 \times 0,6^n \\ 32 + 8 \times 0,6^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 6 \times 0,6^n \\ 8 + 2 \times 0,6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où $u_n = 8 - 6 \times 0,6^n$ et $v_n = 8 + 2 \times 0,6^n$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 8$.

II Suites de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$

1° Suites arithmético-géométriques

Définition : Soient a et b deux nombres réels, $a \neq 1$.

Une suite arithmético-géométrique est définie par une relation du type $u_{n+1} = au_n + b$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ainsi que son 1^{er} terme (u_0 ou u_1 en général).



Dans chaque exercice de BAC qui fait intervenir une suite arithmético-géométrique, une suite est introduite, sans la moindre explication : voilà le secret...

1. Résoudre l'équation $x = ax + b$: on note x_0 sa solution (x_0 est appelé « point fixe »).

2. Introduire (v_n) définie par $v_n = u_n - x_0$

Prouver qu'elle est géométrique de raison a .

3. Revenir à la suite (u_n) via la relation $u_n = v_n + x_0$

Ex : Déterminer la forme explicite de la suite définie par $u_1 = 12$ et $u_{n+1} = 0,2u_n - 4$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Réolvons d'abord $x = 0,2x - 4$

$$x - 0,2x = -4$$

$$0,8x = -4$$

$$x = \frac{-4}{0,8} = -5$$

On introduit alors $v_n = u_n + 5$: on a $v_{n+1} = u_{n+1} + 5$

$$= 0,2u_n - 4 + 5$$

$$= 0,2(v_n - 5) + 1$$

$$= 0,2v_n - 1 + 1$$

$$= 0,2v_n$$

(v_n) est donc géométrique de raison 0,2 et de 1^{er} terme $v_1 = u_1 + 5$

$$= 12 + 5 = 17$$

D'où $v_n = 17 \times 0,2^{n-1}$

Et de là, $u_n = v_n - 5 = 17 \times 0,2^{n-1} - 5$.

Remarque : on peut prouver que si (u_n) est définie par $u_{n+1} = au_n + b$, elle converge si et seulement si $-1 < a < 1$. Et sa limite est alors x_0 , quel que soit son premier terme.

Dans notre exemple, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -5$.

2° Application aux suites de matrices colonnes

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée, B une matrice colonne et $n \in \mathbb{N}^*$.

La méthode de résolution sera similaire à celle des suites numériques :

1. Résoudre l'équation matricielle $X = AX + B$

$$X - AX = B$$

$$(I - A)X = B$$

Cette équation n'admet de solution que si la matrice $I - A$ est inversible.

Et dans ce cas, cette solution est $X_0 = (I - A)^{-1}B$.

2. Introduire la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - X_0$.

On vérifie alors que $V_{n+1} = AV_n$ et donc que $V_n = A^n V_0$

3. On revient à la suite initiale via la relation $U_n = V_n + X_0$

Ex : Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. a. A la calculatrice, calculer $D = P^{-1}AP$.
b. En déduire l'expression explicite de A^n .
2. Etudier la suite définie par $U_{n+1} = AU_n + B$.

1. a. On obtient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

b. On a $A = PDP^{-1}$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$ (admis)

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0 & -0,5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \times 2^n & 0 & 0,5 \times 2^n \\ 4^n & 4^n & 4^n \\ 0,5 \times 4^n & 0 & -0,5 \times 4^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 \times 2^n + 0,5 \times 4^n & 0 & 0,5 \times 2^n - 0,5 \times 4^n \\ -2^n + 4^n & 4^n & -2^n + 4^n \\ 0,5 \times 2^n - 0,5 \times 4^n & 0 & 0,5 \times 2^n + 0,5 \times 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. $X = AX + B$ donne $X - AX = B$ et donc $(I - A)X = B$

$$\text{Or, } (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ (à la calculatrice...)}$$

$$\text{D'où } X_0 = (I - A)^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix}$$

On pose $V_n = U_n - X_0$: on a alors $V_{n+1} = U_{n+1} - X_0$

$$= AU_n + B - X_0$$

$$= A(V_n + X_0) - AX_0$$

$$= AV_n + AX_0 - AX_0$$

$$= AV_n$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \ V_n = A^n V_0$.

$$V_0 = U_0 - X_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 21 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 32 \\ -19 \\ 28 \end{pmatrix}$$

D'où $U_n = V_n + X_0$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0,5 \times 2^n + 0,5 \times 4^n & 0 & 0,5 \times 2^n - 0,5 \times 4^n \\ -2^n + 4^n & 4^n & -2^n + 4^n \\ 0,5 \times 2^n - 0,5 \times 4^n & 0 & 0,5 \times 2^n + 0,5 \times 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 32 \\ -19 \\ 28 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 \times 2^n + 16 \times 4^n + 14 \times 2^n - 14 \times 4^n \\ 32(-2^n + 4^n) - 19 \times 4^n + 28(-2^n + 4^n) \\ 16 \times 2^n - 16 \times 4^n + 14 \times 2^n + 14 \times 4^n \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 30 \times 2^n + 2 \times 4^n - 11 \\ -60 \times 2^n + 41 \times 4^n + 13 \\ 30 \times 2^n - 2 \times 4^n - 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propriété : Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille p définie par la relation $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée de taille p et B est une matrice colonne à p lignes.

Si (U_n) est convergente alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant l'égalité $U = AU + B$.