

CALCUL MATRICIEL

I Généralités

Définition : Soit $(n ; p) \in \mathbb{N}^*$.

Une matrice A de dimension $n \times p$ est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes. (on parle également de *format* ou de *taille*)

Les nombres composant cette matrice sont appelés les *coefficients* (ou *éléments*) de la matrice. On note généralement a_{ij} l'élément situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

La matrice s'écrit alors sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou bien} \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Ex : $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3 .

$\Rightarrow$ On parlera aussi plus simplement de « matrice 2×3 » (ou de « matrice $2 \ 3$ » à l'oral).

Dans cette matrice, $a_{21} = -4$ et $a_{12} = 5$

$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est une matrice 3×1 dans laquelle $b_{31} = 4$ et $b_{13} = \dots$ n'existe pas !

Cas particulier :

- Matrice ligne : matrice de dimension $1 \times p$

Ex : $A = (5 \quad -4 \quad 8)$ comme pour les coordonnées d'un point de l'espace

- Matrice colonne : matrice de dimension $n \times 1$

Ex : $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ comme pour les coordonnées d'un vecteur de l'espace

- Matrice carrée : matrice de dimension $n \times n$

On parle aussi dans ce cas particulier de matrice « d'ordre n ».

Définition : deux matrices A et B sont égales si elles ont la même taille et si tous leurs coefficients sont égaux.

II Opérations sur les matrices

1° Somme de deux matrices

La somme de deux matrices *de même format* est la matrice obtenue **en ajoutant deux à deux les coefficients de A et B situés à la même position.**

Ex : On donne $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+1 & 0+4 \\ -3-2 & 6-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Théorème : soient A, B et C trois matrices de même taille.

1. L'addition de matrices est **commutative** : $A + B = B + A$
2. L'addition de matrices est **associative** : $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

2° Produit d'une matrice par un réel

Le produit d'une matrice A par un réel k est la matrice kA dont les coefficients sont obtenus en **multipliant tous les coefficients de A par k .**

Ex : On donne $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a } 5A = \begin{pmatrix} 5 \times (-3) & 5 \times 2 & 5 \times 0 \\ 5 \times 7 & 5 \times (-5) & 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 0 \\ 35 & -25 & 5 \end{pmatrix}$$

Théorème : soient A et B deux matrices de même taille, et soient k et k' deux réels.

$$k(A + B) = kA + kB \qquad (k + k')A = kA + k'A \qquad (kk')A = k(k'A)$$

3° Produit de deux matrices

Ex : deux chefs pâtisseries suivent les mêmes recettes :

	Beurre	Sucre
Muffin	90	100
Cookie	80	70
Sablé	60	50

Et voilà ce qu'ils souhaitent préparer :

	Muffin $\times 12$	Cookie $\times 12$	Sablé $\times 12$
Chef A	5	6	3
Chef B	6	5	4

	Beurre	Sucre
Chef A	1010	1070
Chef B	1180	1150

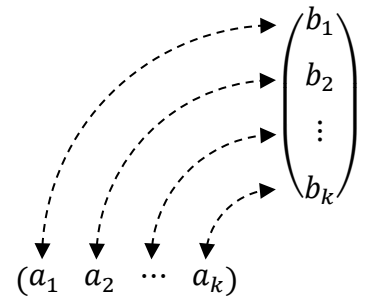
$$\begin{aligned} \text{Beurre pour le Chef A} &= 5 \times 90 + 6 \times 80 + 3 \times 60 \\ &= 450 + 480 + 180 = 1010 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sucre pour le Chef A} &= 5 \times 100 + 6 \times 70 + 3 \times 50 \\ &= 500 + 420 + 150 = 1070 \end{aligned}$$

D'où les définitions :

Le produit d'une matrice ligne $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k)$ par une matrice colonne

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \text{ est le résultat du calcul } a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_p b_p.$$

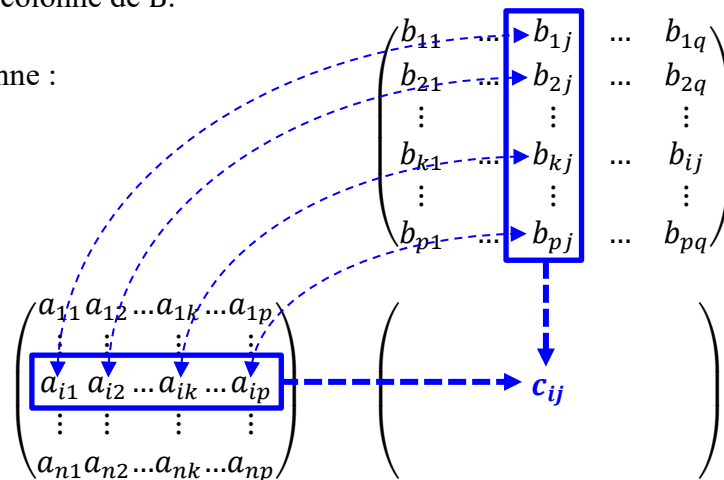


⇒ Il est donc nécessaire qu'il y ait correspondance entre le nombre de colonnes (de la matrice ligne) et le nombre de lignes (de la matrice colonne)

Plus généralement, soient $A = (a_{ij})$ une matrice de dimension $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de dimension $p \times q$.

Le produit $C = A \times B$ est la matrice de dimension $n \times q$ dont le coefficient c_{ij} est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Visuellement, cela donne :



Ex : On donne $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer le produit AB.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -3 + 4 + 0 & -12 + 0 + 0 & 24 + 6 + 0 \\ 7 - 10 + 2 & 28 + 0 - 6 & -56 - 15 + 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -12 & 30 \\ -1 & 22 & -67 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propriété : Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de format $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de format $p \times q$.

La matrice $C = A \times B$ est de dimension $n \times q$ et son terme général est $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$.



En général, $A \times B \neq B \times A$: la multiplication de matrices n'est pas commutative.

Dans l'exemple précédent, $A \times B$ existe et $B \times A$ n'est même pas défini (problème de dimensions)

Propriété : si **A et B commutent** alors $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Preuve : $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$

Et donc, si $AB \neq BA$ alors on ne peut pas aller plus loin...



Attention donc à ne pas oublier de s'assurer que **A et B commutent** !

Théorème : Lorsque les dimensions des matrices font que les produits existent, on a :

1. $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$

2. $A(BC) = (AB)C = ABC$

3. $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

Attention à d'autres erreurs classiques, liées au fait qu'à ce stade on ne sait toujours pas « diviser » par une matrice...



En général, $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$

Ex : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 - 2 \times 1 & 1 \times 4 - 2 \times 2 \\ -2 \times 2 + 4 \times 1 & -2 \times 4 + 4 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



En général, $AB = AC$ n'implique pas $B = C$

Ex : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

III Puissance de matrices carrées

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice **unité** ou matrice **identité** d'ordre n la matrice **carrée** d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui sont égaux à 1. On la note I_n (ou plus simplement **I** s'il n'y a pas d'ambiguïté).

Par exemple, la matrice unité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propriété : 1. Pour toute matrice carrée d'ordre n , $I_n M = M I_n = M$

2. Pour toute matrice colonne C de dimension $n \times 1$, $I_n C = C$

3. Pour toute matrice ligne L de dimension $1 \times n$, $L I_n = L$



Cette matrice joue pour la multiplication le rôle du nombre 1 pour la multiplication des nombres.

Définition : Soit A une matrice carrée et k un nombre réel.

La matrice définie par $A^k = \underbrace{A \times A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$ est appelée matrice puissance k de A .

Par convention $A^0 = I_n$.

Remarque : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $I_n^k = I_n$

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 .

$$\begin{aligned} A^2 = A \times A &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & A^3 = A^2 \times A &= \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -18 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16-3 & 4+2 \\ -12-6 & -3+4 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 52-18 & 13+12 \\ -72-3 & -18+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ -18 & 1 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 34 & 25 \\ -75 & -16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ex : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Initialisation : $n = 0$

$$A^0 = I_3 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{0(0-1)}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ donc la propriété est vérifiée.}$$

Hérédité : supposons que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un certain n .

Montrons que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \times A &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & \frac{2n+n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice : Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 1° a. Sans justification, exprimer A en fonction de I_3 et de N .
 b. Calculer N^2 .
 c. Sans calculer explicitement A^2 , exprimer A^2 en fonction de I_3 et de N .
 2° a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = 5^n I_3 + n5^{n-1}N$
 b. Donner l'écriture explicite de A^n .

1° a. On remarque que $A = 5I_3 + N$.

b. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. $A^2 = (5I_3 + N)^2$

$$= 25I_3^2 + 10I_3N + N^2 \text{ car les matrices } I_3 \text{ et } N \text{ commutent}$$

$$= 25I_3 + 10N$$

2° a. Initialisation : $n = 1$.

$$5^1 I_3 + 1 \times 5^{1-1} N = 5I_3 + N = A \text{ d'après } 1^\circ \text{ a. : la propriété est vérifiée.}$$

Hérédité : Supposons donc que $A^n = 5^n I_3 + n5^{n-1}N$ pour un certain n .

Montrons que $A^{n+1} = 5^{n+1} I_3 + (n+1)5^n N$

$$A^{n+1} = A^n A$$

$$= (5^n I_3 + n5^{n-1}N)(5I_3 + N) \text{ par HR et } 1^\circ \text{ a.}$$

$$= 5^{n+1} I_3 + 5^n N + n5^n N + n5^{n-1} N^2$$

$$= 5^{n+1} I_3 + (n+1)5^n N$$

Par récurrence, on a donc $A^n = 5^n I_3 + n5^{n-1}N$ pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \text{b. On a alors } A^n &= 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n5^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n5^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5^n & n5^{n-1} \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Théorème : Pour tout entier naturel k et pour tous nombres a et b on a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$

⇒ Ce résultat se généralise à toutes les matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{Ex}} : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$