

ÉQUATIONS POLYNÔMIALES

I Polynômes

Définition : Une fonction polynôme est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

où $a_0, a_1, a_2 \dots a_{n-1}, a_n$ sont des réels appelés **coefficients de P** .

Le **degré** d'une fonction polynôme **non nulle** est le **plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$** .

Remarques : 1. Par abus de langage, on parle souvent de « polynôme » au lieu de « fonction polynôme ».

2. Par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.

3. Chaque terme « $a_k z^k$ » est ce qu'on appelle un **monôme**.

Ex : $f(x) = 7x^4 - 5x^3 + 2x - 1$ est **un polynôme de degré 4**.

« $7x^4$ » est **son monôme de plus haut degré**.

Propriété : Si une fonction polynôme est nulle, alors **tous ses coefficients sont nuls**.

Ainsi, deux polynômes sont égaux si et seulement si **tous leurs coefficients sont égaux**.

Définition : Soit P une fonction polynôme et a un nombre complexe.

On dit que a est une **racine** de P si **$P(a) = 0$** .

Ex : Le nombre $z_0 = 2 + 3i$ est-il une racine de $P(z) = z^3 - 11z^2 + 41z - 91$?

$$\begin{aligned} P(2 + 3i) &= (2 + 3i)^3 - 11(2 + 3i)^2 + 41(2 + 3i) - 91 \\ &= 2^3 + 3 \times 2^2 \times 3i + 3 \times 2 \times (3i)^2 + (3i)^3 - 11(4 + 12i - 9) + 82 + 123i - 91 \\ &= 8 + 36i - 54 - 27i - 44 - 132i + 99 + 82 + 123i - 91 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc **$2 + 3i$ est bien une racine de P** .

$\Rightarrow$ On parle de « **racine évidente** » lorsqu'un nombre est une racine « *facile à vérifier* » de P .

Ex : déterminer des racines évidentes pour les polynômes suivants :

$$P(z) = z^3 - 2z^2 + 2z - 1 \quad \rightarrow \quad z_0 = 1$$

$$Q(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 2 \quad \rightarrow \quad z_0 = -2$$

$$R(z) = z^3 - 7z^2 + z - 7 \quad \rightarrow \quad z_0 = i$$

II Factorisation d'un polynôme

1° La théorie

Théorème : Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P la fonction polynôme définie par $P(z) = z^n - a^n$.

Il existe un polynôme Q de degré $(n - 1)$ tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Preuve : Posons $Q(z) = z^{n-1} + az^{n-2} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}$.

A
U
P
R
O
G
R
A
M
M
E

$$\begin{aligned}(z - a)Q(z) &= (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}) \\&= z^n + az^{n-1} + \dots + a^{n-2}z^2 + a^{n-1}z - a(z^{n-1} + az^{n-2} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}) \\&= z^n + az^{n-1} + \dots + a^{n-2}z^2 + a^{n-1}z - az^{n-1} - a^2z^{n-2} - \dots - a^{n-1}z - a^n \\&= z^n - a^n\end{aligned}$$

Donc Q convient, et il est bien de degré $n - 1$.

Corollaire 1 : Soit P une fonction polynôme de degré n et a une racine de P .

Il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Preuve : Posons $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ avec $a_n \neq 0$.

a est une racine de P donc $P(a) = 0$.

A
U
P
R
O
G
R
A
M
M
E

D'où $P(z) = P(z) - P(a)$

$$\begin{aligned}&= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 - P(a) \\&= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 - a_n a^n - a_{n-1} a^{n-1} - \dots - a_1 \times a - a_0 \\&= a_n (z^n - a^n) + a_{n-1} (z^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + a_1 (z - a)\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème précédent, pour tout k compris entre 1 et n , il existe un polynôme Q_{k-1} de degré

$k - 1$ tel que $z^k - a^k = (z - a) Q_{k-1}(z)$

Donc $P(z) = a_n (z - a) Q_{n-1}(z) + a_{n-1} (z - a) Q_{n-2}(z) + \dots + a_1 (z - a)$

$$\begin{aligned}&= (z - a)(a_n Q_{n-1}(z) + a_{n-1} Q_{n-2}(z) + \dots + a_1) \\&= (z - a)Q(z)\end{aligned}$$

Il existe donc bien un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Corollaire 2 : Un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes.

Preuve : Initialisation : $n = 0$

Un polynôme de degré 0 est constant et non nul : il n'admet aucune racine.

A
U
Hérédité : Supposons qu'un polynôme de degré n admette au plus n racines distinctes.

Montrons que c'est vrai pour un polynôme de degré $n + 1$.

P Soit P un polynôme de degré $n + 1$.

R 1^{er} cas : si P n'a aucune racine, c'est terminé.

O 2nd cas : supposons que P admet une racine a .

G On a alors $P(z) = (z - a)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré n .

R Si b est une racine de P distincte de a alors $P(b) = (b - a)Q(b) = 0$.

A Or, $b - a \neq 0$ donc $Q(b) = 0$. Autrement dit, b est une racine de Q .

M De plus, Q admet au plus n racines distinctes par HR donc P admet au plus $n + 1$ racines distinctes.

M Par récurrence, un polynôme de degré n admet donc au plus n racines distinctes.

E Remarques : 1. Cela revient à dire que le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré.

2. Tout comme on parle de « racine double » d'un polynôme du second degré lorsque $\Delta = 0$, on peut avoir des racines multiples pour un polynôme.

Si $P(z) = (z - a)^r Q(z)$ avec $Q(a) \neq 0$ on dit que a est une racine d'ordre r de P .

3. Le seul polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

2° La pratique

Factoriser un polynôme quelconque est une opération compliquée.

Degré 2 : cas déjà traité y compris lorsque $\Delta < 0$:

$$P(z) = az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Degré 3 : le cas général se traite avec la méthode de Cardan (méthode par radicaux) mais c'est fastidieux.

En revanche, si on connaît une racine du polynôme, la factorisation est plus simple.

En effet, si a est une racine de P , alors $P(z) = (z - a)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 2 qu'on pourra déterminer par identification.

Ex 1 : factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^3 - z^2 + 3z + 5$

$z = -1$ est une racine évidente :

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 - (-1)^2 + 3 \times (-1) + 5 \\ &= -1 - 1 - 3 + 5 = 0 \end{aligned}$$

Donc $P(z) = (z + 1)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 2.

Autrement dit, $Q(z) = az^2 + bz + c$.

$$\text{D'où } z^3 - z^2 + 3z + 5 = (z + 1)(az^2 + bz + c)$$

$$= az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c$$

$$= az^3 + (b + a)z^2 + (c + b)z + c$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ \square \\ b + a = -1 \\ \square \\ c + b = 3 \\ \square \\ c = 5 \end{cases}$$

$$\text{D'où } a = 1, c = 5 \text{ et } \begin{cases} b + 1 = -1 \\ \square \\ 5 + b = 3 \end{cases} \quad \text{c'est à dire } \begin{cases} b = -1 - 1 = -2 \\ \square \\ b = 3 - 5 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Donc } P(z) = (z + 1)(z^2 - 2z + 5)$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5$$

$$= 4 - 20$$

$$= -16 = (4i)^2$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } z_1 &= \frac{2 - 4i}{2 \times 1} & \text{et} & & z_2 &= \overline{z_1} \\ &= 1 - 2i & & & &= 1 + 2i \end{aligned}$$

$$\text{Au final, } P(z) = (z + 1)(z - (1 - 2i))(z - (1 + 2i))$$

$$= (z + 1)(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)$$

Remarque : une factorisation dans $\mathbb{R}$ aurait donné $P(z) = (z + 1)(z^2 - 2z + 5)$

Ex 2 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^3 + 5x^2 - 23x + 10 = 0$

$z = 2$ est une racine évidente :

$$P(2) = 2 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 23 \times 2 + 10$$

$$= 16 + 20 - 46 + 10 = 0$$

Donc $P(z) = (z - 2)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 2.

$$\text{Autrement dit, } 2x^3 + 5x^2 - 23x + 10 = (z - 2)(az^2 + bz + c)$$

$$= az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c$$

$$= az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - c$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 2 \\ \square \\ b - 2a = 5 \\ \square \\ c - 2b = -23 \\ \square \\ -2c = 10 \end{cases}$$

On a donc $a = 2$, $c = -5$ et

$$\begin{cases} b - 2 \times 2 = 5 \\ \square \\ -5 - 2 \times b = -23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5 + 4 \\ \square \\ -5 + 23 = 2b \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} b = 9 \\ \square \\ \frac{18}{2} = b = 9 \end{cases}$$

Donc $P(z) = (z - 2)(2z^2 + 9z - 5)$

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 2 \times (-5)$$

$$= 81 + 40$$

$$= 121$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } z_1 &= \frac{-9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} & \text{et} & & z_2 &= \frac{-9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} \\ &= \frac{-9 - 11}{4} & & & &= \frac{-9 + 11}{4} \\ &= \frac{-20}{4} = -5 & & & &= \frac{2}{4} = 0,5 \end{aligned}$$

Au final, l'équation peut s'écrire $(x - 2)2(x - (-5))(x - 0,5) = 0$

$$2(x - 2)(x + 5)(x - 0,5) = 0$$

Les solutions sont donc $x = 2$, $x = -5$ et $x = 0,5$.

Degré 4 : une racine évidente a du polynôme P permet de revenir au cas précédent, avec une factorisation du type $P(z) = (z - a)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 3.

Et il faut donc une seconde racine évidente (pour Q et donc également pour P) pour continuer...

Etc.

Etc.

Etc.

Etc.

Etc.

Etc.

Etc.

Etc.

Etc.

COMPLÉMENTS

Somme et produit des racines n^{ièmes} de l'unité

On sait que le polynôme $P(z) = z^n - 1$ admet n racines distinctes notées w_k pour $k \in \llbracket 0 ; n - 1 \rrbracket$.

On a donc la factorisation $P(z) = (z - w_0)(z - w_1)(z - w_2) \dots (z - w_{n-1})$

Et si on développe, on obtient :

$$z^n - 1 = z^n + (-w_0 - w_1 - w_2 - \dots - w_{n-1})z^{n-1} + \dots + (-w_0)(-w_1)(-w_2) \dots (-w_{n-1})$$

Par identification, on a alors
$$\begin{cases} -(w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1}) = 0 \\ \vdots \\ (-1)^n w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1} = -1 \end{cases}$$

Autrement dit, $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$ et $\prod_{k=0}^{n-1} w_k = (-1)^{n+1}$

Pour la culture, ces résultats se généralisent à tous les polynômes avec les formules de Viète :

- la somme de toutes les racines d'un polynôme vaut $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$ (et donc $\frac{-b}{a}$ pour un polynôme du 2nd degré)
- le produit de toutes les racines d'un polynôme vaut $\frac{(-1)^n a_0}{a_n}$ (et donc $\frac{c}{a}$ pour un polynôme du 2nd degré)

Racine carrée d'un nombre complexe

Quel que soit le nombre complexe Δ , il existe deux nombres complexes opposés δ tels que $\delta^2 = \Delta$.

On n'utilise pas la notation $\sqrt{\quad}$: dans $\mathbb{R}$, elle désigne LA racine carrée positive d'un nombre. En effet, $x^2 = 9$ admet deux racines opposées, et celle qui est positive est notée $\sqrt{9}$. Mais dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de notion de positif ou négatif.

Ex : soit $\Delta = 55 - 48i$. Calculer δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Posons $\delta = a + ib$. On a alors $\delta^2 = (a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$

Par identification, on a
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 55 \\ \vdots \\ 2ab = -48 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 55 \\ \vdots \\ ab = -24 \end{cases}$$

On va ajouter une troisième équation pour simplifier la résolution : $|\delta^2| = |\Delta|$

Autrement dit, $a^2 + b^2 = \sqrt{55^2 + (-48)^2} = 73$

Au final, on a
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 55 \\ \vdots \\ a^2 + b^2 = 73 \end{cases}$$

$L_1 + L_2$: $2a^2 = 128$ et donc $a^2 = 64$. D'où $a = 8$ ou $a = -8$.

Et sachant que $ab = -24$, on en déduit que $b = -3$ ou $b = 3$.

Il existe donc deux solutions : $\delta_1 = 8 - 3i$ et $\delta_2 = -\delta_1 = -8 + 3i$

$\Rightarrow$ On sait donc résoudre les équations du 2nd degré à coefficients complexes, car on est capable de calculer δ

Division de polynômes

En remplacement de la méthode d'identification des coefficients, il existe une autre méthode – qui n'est pas au programme – qui consiste à poser une division ... de polynômes.

Reprenons l'exemple 1 avec $P(z) = 2z^3 - 6z^2 + 14z - 10 = (z - 1)Q(z)$

$$\begin{array}{r|l} 2z^3 - 6z^2 + 14z - 10 & z - 1 \\ \hline 2z^3 - 2z^2 & 2z^2 - 4z + 10 \\ \hline -4z^2 + 14z - 10 & \\ -4z^2 + 4z & \\ \hline 10z - 10 & \\ 10z - 10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Théorème de d'Alembert-Gauss

Également connu sous le nom de « *théorème fondamental de l'algèbre* » il stipule que :

« **Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet**
au moins une racine dans $\mathbb{C}$. »

Une conséquence de ce théorème est que tout polynôme de degré n à admet **exactement n racines dans**

$\mathbb{C}$. Les racines ne sont pas nécessairement distinctes ici.

Il peut donc se factoriser sous la forme $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$.

Sa preuve - qui n'est pas algébrique - dépasse largement les compétences des lycéens... Alors pourquoi « *théorème fondamental de l'algèbre* » ? Parce qu'il fut un temps où l'algèbre se résumait à la résolution d'équations, ce qui n'est aujourd'hui plus le cas...