MATHEMATIQUES N°9

Remarques : *histoire de terminer l'année en beauté…*

Exercice 1 : *(8,5 points)*

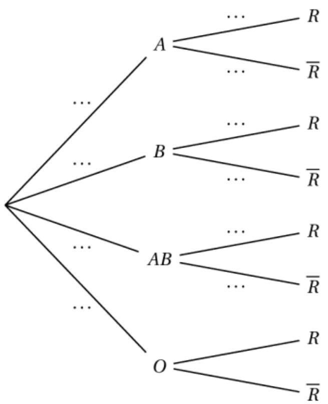
On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.
Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.
Au sein de la population française, on sait que :

- 45% des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85% sont de rhésus positif
- 10% des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84% sont de rhésus positif
- 3% des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82% sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française. On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A »
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B »
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB »
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O »
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif »

Pour un évènement quelconque E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $p(E)$ la probabilité de E.



1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.
2. Montrer que $p(B \cap R) = 0{,}084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. On précise que $p(R) = 0{,}8397$. Montrer que $p_O(R) = 0{,}83$.
4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.
   Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.
   Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,0714.
5. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.
   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
   c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 7,14 et que sa variance $V(X)$ est égale à 6,63 à 10^{-2} près.
6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées $1, 2, 3, \ldots, N$ où N est un entier naturel non nul.
   On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre dedonneurs universels dans cet échantillon. On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, …, X_N pour la ville N.
   On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.
   On considère la variable aléatoire $M_N = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$
   a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?
   b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.
   c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N. Montrer que $V(M_N) = \dfrac{6{,}63}{N}$
   d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé Tchebychev permet d'affirmer que : $p(7 < M_N < 7{,}28) \geq 0{,}95$.

Exercice 2 : *(6,5 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$

1. Montrer que f est 2π-périodique.
2. Etudier la parité de f.
3. Montrer que $f'(x) = (1 + \cos x)(2\cos x - 1)$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$
5. En déduire le tableau de variation de f sur $[-\pi;\pi]$

Exercice 3 : *(5 points)*

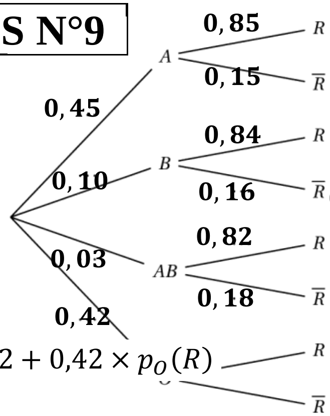
1. La fonction f est définie par $f(t) = (60t + 40)e^{-0{,}5t}$, $\forall\, t \in [0\,;10]$.
   À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\int_0^4 f(t)dt = 320 - \frac{800}{e^2}$$
2. a. Calculer $T = \displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{2x^2+1}dx$ et $O = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$
   b. Vérifier que $P = \displaystyle\int_0^1 \frac{5e^x}{(2e^x+3)^2}dx = \frac{e-1}{2e+3}$

Corrigé

MATHEMATIQUES N°9

<u>Exercice 1</u> : *(8,5 points)*

1.



0,75

2. $p(B \cap R) = 0{,}10 \times 0{,}84 = 0{,}084$
   8,4% de la population est de groupe sanguin B et de rhésus positif. 0,5

3. On utilise la formule des probabilités totales :
   $p(R) = 0{,}45 \times 0{,}85 + 0{,}10 \times 0{,}84 + 0{,}03 \times 0{,}82 + 0{,}42 \times p_O(R)$
   $0{,}8397 = 0{,}4911 + 0{,}42 \times p_O(R)$
   $0{,}8397 - 0{,}4911 = 0{,}42 \times p_O(R)$
   $\dfrac{0{,}3486}{0{,}42} = p_O(R)$
   $p_O(R) = 0{,}83$ 1,5

4. $p(O \cap \overline{R}) = 0{,}42 \times 0{,}17 = 0{,}0714$ 0,5

5. a. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues dont le succès a une probabilité $p = 0{,}0714$.
   Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100\,;0{,}0714)$. 0,5

   b. $p(X \leq 7) \approx 0{,}577$ 0,5

   c. $E(X) = 100 \times 0{,}0714 = 7{,}14$ 0,75
   $V(X) = 100 \times 0{,}0714 \times 0{,}9286 \approx 6{,}63$

6. a. La variable aléatoire M_N représente le nombre moyen de donneurs universels sur les N collectes de sang organisées. 0,5

   b. $E(M_N) = E(X) = 7{,}14$. 0,5

   c. $V(M_N) = \dfrac{V(X)}{N} = \dfrac{6{,}63}{N}$ 0,5

   d. On veut $p(7 < M_N < 7{,}28) \geq 0{,}95$
   $p(7 - 7{,}14 < M_N - 7{,}14 < 7{,}28 - 7{,}14) \geq 0{,}95$
   $p(-0{,}14 < M_N - 7{,}14 < 0{,}14) \geq 0{,}95$
   $p(|M_N - 7{,}14| < 0{,}14) \geq 0{,}95$
   Or, d'après Bienaymé-Tchebychev :
   $$p(|M_N - 7{,}14| \geq 0{,}14) \leq \frac{6{,}63}{N \times 0{,}14^2}$$
   $$1 - p(|M_N - 7{,}14| \geq 0{,}14) \geq 1 - \frac{6{,}63}{N \times 0{,}14^2}$$
   $$p(|M_N - 7{,}14| < 0{,}14) \geq 1 - \frac{6{,}63}{N \times 0{,}14^2}$$
   Il faut donc que $1 - \dfrac{6{,}63}{N \times 0{,}14^2} \geq 0{,}95$
   $$1 - 0{,}95 \geq \frac{6{,}63}{N \times 0{,}14^2}$$
   $$0{,}05N \geq \frac{6{,}63}{0{,}14^2}$$
   $$N \geq \frac{6{,}63}{0{,}05 \times 0{,}14^2}$$
   $$N \geq 6\,766$$
   La plus petite valeur de N est donc 6 766. 2

<u>Exercice 2</u> : *(6,5 points)*

1. $f(x + 2\pi) = (1 + \cos(x + 2\pi))\sin(x + 2\pi)$
$= (1 + \cos(x))\sin(x)$
$= f(x)$
Donc f est 2π-périodique. 0,75

2. $f(-x) = (1 + \cos(-x))\sin(-x)$
$= (1 + \cos(x))(-\sin(x))$
$= -(1 + \cos(x))\sin(x)$
$= -f(x)$
f est donc impaire. 0,75

3. $f'(x) = -\sin(x)\sin(x) + \cos(x)\,(1 + \cos(x))$
$= -\sin^2(x) + \cos(x) + \cos^2(x)$
$= \cos^2(x) - 1 + \cos(x) + \cos^2(x)$
$= 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$
Or, $(1 + \cos(x))(2\cos(x) - 1) = 2\cos(x) - 1 + 2\cos^2(x) - \cos(x)$
$= 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$
Donc $f'(x) = (1 + \cos(x))(2\cos(x) - 1)$. 2

4. On a $1 + \cos(x) \geq 0$ car $\cos(x) \geq -1$.
$2\cos(x) - 1 \geq 0$
$2\cos(x) \geq 1$
$\cos(x) \geq \dfrac{1}{2}$
$x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$ 2

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	0 ↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘ 0

5.

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	|	$+$	|	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

1

<u>Exercice 3</u> : *(5 points)*

1. $\int_0^4 f(t)dt = \left[(60t+40)\frac{e^{-0,5t}}{-0,5}\right]_0^4 - \int_0^4 60\frac{e^{-0,5t}}{-0,5}dt$

$$= (60\times 4+40)\frac{e^{-0,5\times 4}}{-0,5} - (60\times 0+40)\frac{e^{-0,5\times 0}}{-0,5} + 120\int_0^4 e^{-0,5t}\,dt$$

$$= -560e^{-2} + 80 + 120\left[\frac{e^{-0,5t}}{-0,5}\right]_0^4$$

$$= \frac{-560}{e^2} + 80 + 120\left(\frac{e^{-2}}{-0,5} - \frac{e^0}{-0,5}\right)$$

$$= \frac{-560}{e^2} + 80 - 240e^{-2} + 240$$

$$= 320 - \frac{800}{e^2}$$ 2

2. $T = \int_0^1 \frac{3x}{2x^2+1}dx$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{4x}{2x^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[\ \ln(2x^2+1)\ \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4}(\ln(2+1) - \ln(0+1))$$

$$= \frac{3}{4}\ln(3)$$ 1

$O = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\ \sqrt{3x+1}\ \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{3\times 1+1} - \sqrt{3\times 0+1})$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{4} - \sqrt{1})$$

$$= \frac{2}{3}(2-1)$$

$$= \frac{2}{3}$$ 1

$P = \int_0^1 \frac{5e^x}{(2e^x+3)^2}dx$

$$= \frac{-5}{2}\int_0^1 \frac{-2e^x}{(2e^x+3)^2}dx$$

$$= \frac{-5}{2}\left[\ \frac{1}{2e^x+3}\ \right]_0^1$$

$$= \frac{-5}{2}\left(\frac{1}{2e+3} - \frac{1}{2+3}\right)$$

$$= \frac{-5}{2}\left(\frac{1}{2e+3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{-5}{2}\times\frac{5-2e-3}{5(2e+3)}$$

$$= \frac{-1}{2}\times\frac{2-2e}{2e+3}$$

$$= \frac{e-1}{2e+3}$$

1