MATHEMATIQUES N°8

<u>Exercice 1</u> : *(9 points)*
Déterminer une primitive de chacun des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 5(4x-7)^2$ $\qquad f_2(x) = 7e^{2-3x}$ $\qquad f_3(x) = \dfrac{-3}{5\sqrt{7x+1}}$

$f_4(x) = \dfrac{5x}{3x^2+1}$ $\qquad f_5(x) = \dfrac{2}{(2-5x)^2}$ $\qquad f_6(x) = \dfrac{2x^3-3x+5}{x}$

<u>Exercice 2</u> : *(3 points)*
Déterminer la solution f de l'équation différentielle $3y' - 2y = 4$ telle que $f(6) = 2$

<u>Exercice 3</u> : *(4 points)*
A l'instant *t* = 0, on injecte dans le sang d'un patient une dose de 1,6 unités d'une substance médicamenteuse. Cette substance se répartit instantanément dans le sang et est ensuite progressivement éliminée.
On note $f(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant *t* où *t* est exprimé en heures. On modélise le processus d'élimination par une équation différentielle $f' = -k \times f$ où k est un nombre déterminé expérimentalement.

1. Montrer que $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[, f(t) = 1{,}6e^{-kt}$.
2. Au bout d'une heure, la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 25%. Déterminer alors la valeur exacte de k.
   Si besoin pour la question suivante, on prendra pour valeur $k = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$
3. On considère que le patient est protégé tant que la quantité présente dans le sang est supérieure à 0,2 unités. Déterminer la durée de protection d'un patient. On donnera une réponse à la minute près sous la forme « … h … min ».

<u>Exercice 4</u> : *(2 points)*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathrm{E(X)} = -3$, $\mathrm{E(Y)} = 5$, $\sigma(\mathrm{X}) = 9$ et $\sigma(\mathrm{Y}) = 16$. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $Z = 2\mathrm{X} - \mathrm{Y} + 7$.

<u>Exercice 5</u> : *(2 points)*

1. Démontrer que la fonction définie par $f(x) = \sin(2x+\pi)$ est π-périodique.
2. Démontrer que la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x \sin x}{x^2+1}$ est paire.
3. Cette question ne demande aucune justification…
   a. Déterminer $x \in [-\pi\ ;\pi[$ tel que $\cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{-1}{2}$
   b. Déterminer $x \in [0\ ;2\pi[$ tel que $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

MATHEMATIQUES N°8

<u>Exercice 1</u> : *(9 points)*
Déterminer une primitive de chacun des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 5(4x-7)^2$ $\qquad f_2(x) = 7e^{2-3x}$ $\qquad f_3(x) = \dfrac{-3}{5\sqrt{7x+1}}$

$f_4(x) = \dfrac{5x}{3x^2+1}$ $\qquad f_5(x) = \dfrac{2}{(2-5x)^2}$ $\qquad f_6(x) = \dfrac{2x^3-3x+5}{x}$

<u>Exercice 2</u> : *(3 points)*
Déterminer la solution f de l'équation différentielle $3y' - 2y = 4$ telle que $f(6) = 2$

<u>Exercice 3</u> : *(4 points)*
A l'instant *t* = 0, on injecte dans le sang d'un patient une dose de 1,6 unités d'une substance médicamenteuse. Cette substance se répartit instantanément dans le sang et est ensuite progressivement éliminée.
On note $f(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant *t* où *t* est exprimé en heures. On modélise le processus d'élimination par une équation différentielle $f' = -k \times f$ où k est un nombre déterminé expérimentalement.

1. Montrer que $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[, f(t) = 1{,}6e^{-kt}$.
2. Au bout d'une heure, la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 25%. Déterminer alors la valeur exacte de k.
   Si besoin pour la question suivante, on prendra pour valeur $k = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$
3. On considère que le patient est protégé tant que la quantité présente dans le sang est supérieure à 0,2 unités. Déterminer la durée de protection d'un patient. On donnera une réponse à la minute près sous la forme « … h … min ».

<u>Exercice 4</u> : *(2 points)*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathrm{E(X)} = -3$, $\mathrm{E(Y)} = 5$, $\sigma(\mathrm{X}) = 9$ et $\sigma(\mathrm{Y}) = 16$. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $Z = 2\mathrm{X} - \mathrm{Y} + 7$.

<u>Exercice 5</u> : *(2 points)*

1. Démontrer que la fonction définie par $f(x) = \sin(2x+\pi)$ est π-périodique.
2. Démontrer que la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x \sin x}{x^2+1}$ est paire.
3. Cette question ne demande aucune justification…
   a. Déterminer $x \in [-\pi\ ;\pi[$ tel que $\cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{-1}{2}$
   b. Déterminer $x \in [0\ ;2\pi[$ tel que $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

Corrigé

MATHEMATIQUES N°1

Exercice 1 : *(9 points)*

$$f_1(x) = 5(4x-7)^2 = \frac{5}{4}\times 4(4x-7)^2$$

$$F_1(x) = \frac{5}{4}\times\frac{(4x-7)^3}{3} = \frac{5}{12}(4x-7)^3 \quad 1{,}5$$

$$f_2(x) = 7e^{2-3x} = \frac{7}{-3}\times(-3)e^{2-3x}$$

$$F_2(x) = \frac{7}{-3}e^{2-3x} = \frac{-7}{3}e^{2-3x} \quad 1{,}5$$

$$f_3(x) = \frac{-3}{5\sqrt{7x+1}} = \frac{-3}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{7}{2\sqrt{7x+1}}$$

$$F_3(x) = \frac{-3}{5}\times\frac{2}{7}\sqrt{7x+1} = \frac{-6}{35}\sqrt{7x+1} \quad 1{,}5$$

$$f_4(x) = \frac{5x}{3x^2+1} = \frac{5}{6}\times\frac{6x}{3x^2+1}$$

$$F_4(x) = \frac{5}{6}\times\ln(3x^2+1) = \frac{5}{6}\ln(3x^2+1) \quad 1{,}5$$

$$f_5(x) = \frac{2}{(2-5x)^2} = \frac{2}{5}\times\frac{5}{(2-5x)^2}$$

$$F_5(x) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{2-5x} = \frac{2}{5(2-5x)} \quad 1{,}5$$

$$f_6(x) = \frac{2x^3-3x+5}{x} = \frac{2x^3}{x}-\frac{3x}{x}+\frac{5}{x} = 2x^2-3+5\times\frac{1}{x}$$

$$F_6(x) = \frac{2x^3}{3}-3x+5\ln x \quad 1{,}5$$

Exercice 2 : *(3 points)*

$3y'-2y=4$ équivaut à $3y' = 2y+4$

$$y' = \frac{2y+4}{3} = \frac{2}{3}y+\frac{4}{3}$$

D'où $f(x) = ce^{\frac{2}{3}x} - \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

$$= ce^{\frac{2}{3}x} - \frac{4}{3}\times\frac{3}{2} = ce^{\frac{2}{3}x}-2 \quad 1{,}25$$

Or $f(6) = 2$ donc $ce^{\frac{2}{3}\times 6}-2 = 2$

$$ce^4 = 2+2$$

$$c = \frac{4}{e^4}$$

Donc $f(x) = \frac{4}{e^4}e^{\frac{2}{3}x}-2 = 4e^{\frac{2}{3}x-4}-2$ 1,75

Exercice 3 : *(4 points)*

1. On a $f(t) = ce^{-kt}$ où $c\in\mathbb{R}$
   Par ailleurs, $f(0) = 1{,}6$
   $$ce^{-k\times 0} = 1{,}6 \quad \text{c'est-à-dire} \quad c = 1{,}6$$
   Donc $f(t) = 1{,}6e^{-kt}$ 1

2. Au bout d'une heure, la quantité de substance présente dans le sang est $1{,}6\times 0{,}75 = 1{,}2$. Autrement dit, $f(1) = 1{,}2$
   $$1{,}6e^{-k\times 1} = 1{,}2$$
   $$e^{-k} = \frac{1{,}2}{1{,}6}$$
   $$-k = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$
   $$k = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \quad 1{,}5$$

3. On a $1{,}6e^{-\ln\left(\frac{4}{3}\right)t} \geq 0{,}2$
   $$e^{-\ln\left(\frac{4}{3}\right)t} \geq \frac{0{,}2}{1{,}6}$$
   $$-\ln\left(\frac{4}{3}\right)t \geq \ln\left(\frac{0{,}2}{1{,}6}\right) \quad \text{et donc} \quad t \leq \frac{\ln\left(\frac{0{,}2}{1{,}6}\right)}{-\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \quad 1{,}25$$

Un patient est donc protégé tant que $t \leq 7{,}22826\ldots$ h

Autrement dit, 7 h 13 min. *L'arrondi donne 7h14 MAIS la protection s'arrête juste avant !* 😊 0,25

Exercice 4 : *(2 points)*

$$E(Z) = 2E(X)-E(Y)+7 = 2\times(-3)-5+7 = -4 \quad 0{,}75$$

X et Y sont indépendantes donc :

$$V(Z) = 2^2V(X)+V(Y) = 4\times 81+256 = 580$$

D'où $\sigma(2X+Y+7) = \sqrt{580}$ 1,25

Exercice 5 : *(2 points)*

1. $f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)+\pi) =$
   $= \sin(2x+2\pi+\pi) = \sin(2x+\pi) = f(x)$ 0,5

2. $$g(-x) = \frac{-x\sin(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x\times(-\sin x)}{x^2+1} = \frac{x\sin x}{x^2+1} = g(x) \quad 0{,}5$$

3. a. $x = \frac{-5\pi}{6}$ 0,5

   b. $x = \frac{7\pi}{4}$ 0,5