

# MATHEMATIQUES N°8

**Remarques :** les exercices peuvent être faits dans n'importe quel ordre. Et il semblerait qu'un rhinoféroce ait été aperçu : pas un mot pour ne pas l'effrayer, mais l'indiquer au tout début de la copie.

**Exercice 1 :** (6,5 points)

Résoudre les équations / inéquations suivantes :

- a.  $e^{7-5x} - 1 = 0$
- b.  $\frac{e^{3x^2}}{e^6} - e^2 \times e^{-10x} < 0$
- c.  $5e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

**Exercice 2 :** (3 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x - 3)e^{-2x}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = (-4x + 8)e^{-2x}$
2. Effectuer le tableau de variations de  $f$ .
3. Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}_0$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.

**Exercice 3 :** (4 points)

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation à 22h00. La température  $y$  est alors de  $20^\circ\text{C}$ . Le but de ce problème est d'étudier l'évolution de la température de cette pièce de 22h00 à 7h00 le lendemain matin.

On suppose que la température extérieure est constante et égale à  $11^\circ\text{C}$ . On désigne par  $t$  le temps écoulé depuis 22h00, en heures, et par  $f(t)$  la température de la pièce exprimée en  $^\circ\text{C}$ . La température de la pièce est donc modélisée par une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 9]$ .

1. Conjecturer le sens de variation de  $f$  avec des arguments simples.
2. On admet que  $f(t) = 9e^{-0,12t} + 11$ .  
Déterminer mathématiquement le sens de variation de  $f$ .
3. Les réponses seront données par arrondi au dixième de degré près.
  - a. Quelle température fait-il dans cette pièce à minuit ?
  - b. Quelle température fait-il dans cette pièce à 1h24 (le matin) ?
  - c. Calculer  $f(9)$  puis interpréter le résultat.
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'heure à partir de laquelle la température sera inférieure à  $16,5^\circ\text{C}$ . On donnera une réponse au quart d'heure près.

**Exercice 4 :** (2,5 points)

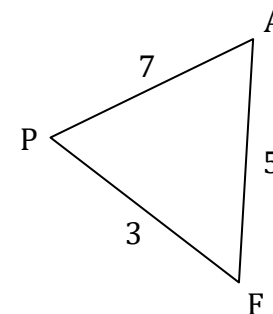
Effectuer le tableau de variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{3x^2}{e^x}$$

**Exercice 5 :** (4 points)

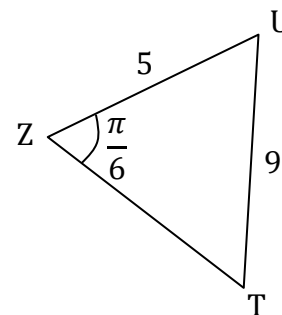
1. On considère le triangle PAF ci-contre.

Calculer  $\widehat{APF}$  au dixième de degré.



2. On considère le triangle ZUT ci-contre.

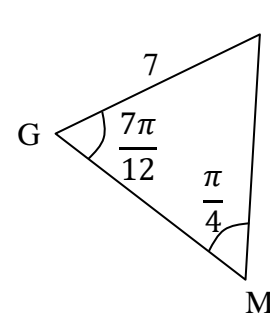
Calculer  $\widehat{TZ}$  au dixième près.



**Bonus :** (+0,5 points)

Avec les notations d'Al-Kashi, on a  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

Calculer  $\widehat{GM}$ .



# MATHEMATIQUES N°8

Rhinoferoce (+0,25)

## Exercice 1 : (6,5 points)

a.  $e^{7-5x} - 1 = 0$   
 $e^{7-5x} = 1$   
 $e^{7-5x} = e^0$   
 $7 - 5x = 0$   
 $7 = 5x$   
 $\frac{7}{5} = x$  (1)

b.  $\frac{e^{3x^2}}{e^6} - e^2 \times e^{-10x} < 0$   
 $e^{3x^2-6} - e^{2-10x} < 0$   
 $e^{3x^2-6} < e^{2-10x}$   
 $3x^2 - 6 < 2 - 10x$   
 $3x^2 - 6 - 2 + 10x < 0$   
 $3x^2 + 10x - 8 < 0$

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 3 \times (-8)$$

$$= 100 + 96$$

$$= 196$$

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{196}}{2 \times 3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10 + \sqrt{196}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-10 - 14}{6} \quad \text{et} \quad = \frac{-10 + 14}{6}$$

$$= \frac{-24}{6} = -4 \quad \text{et} \quad = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

D'où  $x \in ]-4; \frac{2}{3}[$  (2,5)

c. On pose  $X = e^x$  : l'équation devient  $5X^2 - 2X - 3 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times (-3)$$

$$= 4 + 60$$

$$= 64$$

$$X_1 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2 \times 5} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2 \times 5}$$

$$= \frac{2 + 8}{10} \quad \text{et} \quad = \frac{2 - 8}{10}$$

$$= \frac{10}{10} = 1 \quad \text{et} \quad = \frac{-6}{10} = -0,6$$

Or,  $X = e^x$  donc  $X > 0$ .

La seule possibilité est donc  $X = 1$  c'est-à-dire  $e^x = 1$ .

D'où  $x = 0$ . (3)

## Exercice 2 : (3 points)

1.  $f'(x) = 2e^{-2x} + (-2e^{-2x})(2x - 3)$   
 $= e^{-2x}(2 - 2(2x - 3))$   
 $= e^{-2x}(2 - 4x + 6)$   
 $= e^{-2x}(8 - 4x)$  (0,75)

2.  $f'(x)$  est du signe de  $8 - 4x$  car  $e^{-2x} > 0$ .

$$8 - 4x = 0$$

$$8 = 4x$$

$$\frac{8}{4} = 2$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	↗		↘

(1,5)

3.  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$   
 $= e^{-2 \times 0}(8 - 4 \times 0)x + (2 \times 0 - 3)e^{-2 \times 0}$   
 $= 8x - 3$  (0,75)

## Exercice 3 : (4 points)

1.  $f$  est décroissante, car la température extérieure est inférieure à la température intérieure, et le chauffage est éteint... (0,25)

2.  $f'(t) = 9 \times (-0,12)e^{-0,12t}$   
 $= -1,08e^{-0,12t}$

Or, une exponentielle est toujours positive donc  $f'(t) < 0$ .

La fonction  $f$  est donc bien décroissante. (0,75)

3. a.  $f(2) = 9e^{-0,12 \times 2} + 11 \approx 18,1$   
 A minuit, il fera  $18,1^\circ\text{C}$ . (0,5)

b.  $24 \text{ min} = 24/60 = 0,4 \text{ h}$   
 $1\text{h}24$  correspond donc à  $t = 3,4 \text{ h}$   
 $f(3,4) = 9e^{-0,12 \times 3,4} + 11 \approx 17,0$   
 A  $1\text{h}24$ , il fera  $17^\circ\text{C}$ . (1)

c.  $f(9) = 9e^{-0,12 \times 9} + 11 \approx 14,1$   
 A  $7\text{h}00$ , au moment de rallumer le chauffage, la température sera de  $14,1^\circ$ . (0,5)

4. On obtient  $t = 4,25$  : c'est à partir de  $2\text{h}15$  que la température passera en-dessous de  $16,5^\circ$ . (1)

**Exercice 4 : (2,5 points)**

$$f'(x) = \frac{6xe^x - 3x^2e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(6x - 3x^2)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{6x - 3x^2}{e^x} \quad \textcircled{1}$$

$f'(x)$  est du signe de  $6x - 3x^2$  car  $e^x > 0$ .

$$6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$$

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-
$f(x)$				

1,5

**Exercice 5 : (4 points)**

1. D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$AF^2 = AP^2 + PF^2 - 2 \times AP \times PF \times \cos \widehat{APF}$$

$$5^2 = 7^2 + 3^2 - 2 \times 7 \times 3 \times \cos \widehat{APF}$$

$$25 = 49 + 9 - 42 \cos \widehat{APF}$$

$$42 \cos \widehat{APF} = 58 - 25$$

$$\cos \widehat{APF} = \frac{33}{42}$$

$$\widehat{APF} = \cos^{-1} \left( \frac{33}{42} \right) \approx 38,2^\circ \quad \textcircled{1,5}$$

2. D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$UT^2 = TZ^2 + UZ^2 - 2 \times TZ \times UZ \times \cos \widehat{UTZ}$$

$$9^2 = TZ^2 + 5^2 - 2 \times TZ \times 5 \times \cos \left( \frac{\pi}{6} \right)$$

$$81 = TZ^2 + 25 - 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} TZ$$

$$0 = TZ^2 + 25 - 5TZ\sqrt{3} - 81 \quad \text{c'est à dire} \quad x^2 - 5x\sqrt{3} - 56 = 0$$

$$\Delta = (-5\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times (-56)$$

$$= 25 \times 3 + 224$$

$$= 299$$

$$x_1 = \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{299}}{2 \times 1}$$

$$x_1 < 0$$

$$\text{D'où } TZ \approx 13,0 \quad \textcircled{2,5}$$

$$x_2 = \frac{5\sqrt{3} + \sqrt{299}}{2 \times 1}$$

$$\approx 13,0$$

**Bonus :**

$$\widehat{GYM} = \pi - \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{12\pi - 7\pi - 3\pi}{12}$$

$$= \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\widehat{GM}}{\sin \widehat{GYM}} = \frac{\widehat{GY}}{\sin \widehat{GM}} = \frac{\widehat{YM}}{\sin \widehat{GM}}$$

$$\frac{GM}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{7}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{YM}{\sin \frac{7\pi}{12}}$$

$$\frac{GM}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$GM = \frac{7 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}}$$