

BAC Blanc, Lycée Arago, Mercredi 11 février 2025

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

La calculatrice est autorisée. La présentation et la rédaction pourront être sanctionnées jusqu'à hauteur de 1 point.

Indiquer sur la copie GRANDIN, LEVY, DOMERCQ (lundi), DOMERCQ (vendredi)

EXERCICE 1 (5 points)

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,6 \\ u_{n+1} = 0,75u_n(1 - 0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année 2020 + n .

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022. Arrondir à l'unité si besoin.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = 0,75x(1 - 0,15x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
 - a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
 - b. Le biologiste a programmé en langage Python l'algorithme ci-après :

```
U = 0,6
N = 0
Tant que U > 0,02 :
    U = 0,75 * U * (1 - 0,15 * U)
    N = N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

Sans explications, donner la valeur numérique renvoyée par cet algorithme. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 (5 points)

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97. La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,014 65.

On note A l'événement « L'alarme s'active », D l'événement « Un danger se présente », $\overline{M}$ l'événement contraire d'un événement M et $P(M)$ la probabilité de M .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2.
 - a. Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.
 - b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est 0,005.
4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.
Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à 0,01.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

On note S l'événement « L'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0,005$ 25.

On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} .

1. Donner la loi de probabilité suivie par X et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise. Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07. Aucune justification n'est demandée : rien, nada, walou, peanuts, juste la réponse...

EXERCICE 3 (6 points)**Partie A**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer, en justifiant, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Interpréter graphiquement ces limites.
3. On admet que pour tout réel x , $f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$ où f'' désigne la dérivée seconde de f . Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer le nombre de points d'inflexion de C_f .

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - xe^x + 1$

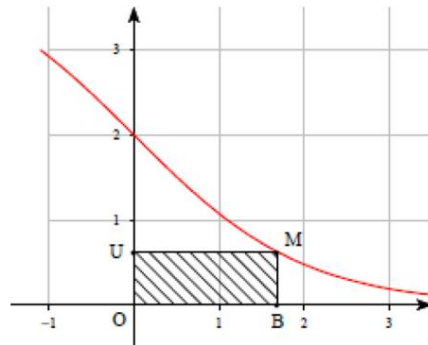
1. Calculer, en justifiant, les limites de $g(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. a. Démontrer que pour tout réel x : $g'(x) = -xe^x$
b. En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.
3. a. Montrer en justifiant, que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qu'on notera α .
b. Donner un encadrement à 10^{-2} près de α .
c. Démontrer que : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$
4. Dresser le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$.

Partie C

On donne ci-contre la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormé, où f est la fonction définie à la partie A. Soit M un point appartenant à C_f . On note x son abscisse.

Le point B est le point de l'axe des abscisses qui a la même abscisse que M .

Le point U est le point de l'axe des ordonnées qui a la même ordonnée que M .



1. Exprimer, en fonction de x , les coordonnées des points M , B et U .
2. Soit la fonction A qui, à tout réel $x \geq 0$, associe l'aire du rectangle $OBMU$.
a. Exprimer $A(x)$ en fonction de x .
b. Démontrer que $A'(x) = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}$ où g est la fonction définie à la partie B et A' la dérivée de A .
c. En déduire le sens de variation de la fonction A sur $[0; +\infty[$.
d. Déterminer la valeur de x pour laquelle que l'aire du rectangle $OBMU$ est maximale.
3. Démontrer que la tangente à la courbe C_f en son point d'abscisse α et la droite (BU) sont parallèles.

EXERCICE 4 (4 points)

Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

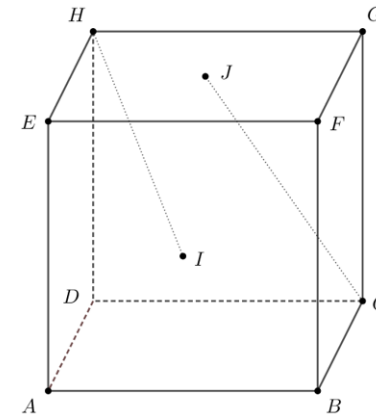
Question 1 : De combien de choix dispose un élève de seconde pour choisir ses trois spécialités de première parmi les douze proposées ?

Question 2 : Une entreprise comprend 35 employés dont 16 femmes et 19 hommes. On élit le bureau directeur du comité d'entreprise, composé d'un président, d'un vice-président et d'un trésorier, ces postes n'étant pas cumulables.

- a. Quel est le nombre de bureaux possibles ?
- b. Combien de ces bureaux ont pour président une femme ?

Question 3 : Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de l'espace ? Justifier.

Les deux dernières questions utilisent la figure ci-dessous :



ABCDEFGH est un cube de côté a , réel positif.

I est le centre de la face ABFE et J est le centre de la face EFGH.

Question 4

Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HB}$

Question 5

Calculer $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{CJ}$

EXERCICE 1 (5 points)

$$\begin{aligned}
 1. \text{ 2021 correspond à } n = 1 \text{ donc } u_1 &= 0,75u_0(1 - 0,15u_0) \\
 &= 0,75 \times 0,6(1 - 0,15 \times 0,6) \\
 &= 0,4095
 \end{aligned}$$

Cela fait donc environ 410 individus.

$$\begin{aligned}
 2022 \text{ correspond à } n = 2 \text{ donc } u_2 &= 0,75u_1(1 - 0,15u_1) \\
 &= 0,75 \times 0,4095(1 - 0,15 \times 0,4095) \\
 &\approx 0,2882
 \end{aligned}$$

Cela fait donc environ 288 individus. (0,5)

$$\begin{aligned}
 2. f'(x) &= 0,75(1 - 0,15x) - 0,15 \times 0,75x \\
 &= 0,75 - 0,1125x - 0,1125x \\
 &= 0,75 - 0,225x
 \end{aligned}$$

$$0,75 - 0,225x = 0$$

$$0,75 = 0,225x$$

$$\frac{0,75}{0,225} = x \approx 3,33$$

Or, $x \in [0 ; 1]$ donc $f'(x) > 0$.

x	0	1
$f(x)$	0	0,6375

(0,75)

$$\begin{aligned}
 3. f(x) = x \text{ équivaut à } 0,75x(1 - 0,15x) &= x \\
 0,75x(1 - 0,15x) - x &= 0 \\
 x(0,75(1 - 0,15x) - 1) &= 0 \\
 x(0,75 - 0,1125x - 1) &= 0 \\
 x(-0,25 - 0,1125x) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } x = 0 \text{ ou } -0,25 - 0,1125x = 0$$

$$-0,25 = 0,1125x$$

$$\frac{-0,25}{0,1125} = x < 0$$

La seule solution dans $[0 ; 1]$ est donc $x = 0$. (1)

4. a. Initialisation : $n = 0$

$$u_0 = 0,6 \text{ et } u_1 = 0,4095 \text{ donc } 0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1.$$

Hérédité : supposons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ pour un certain rang $n \geq 0$.

Montrons que $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$

D'où $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$ car f est croissante sur $[0 ; 1]$.

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 0,6375 \leq 1$$

Par récurrence, on a donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1)

b. D'après 4. b., (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. En déduire que la suite (u_n) est convergente. (0,5)

c. ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ donc $\ell = 0$ d'après la question 3. (0,5)

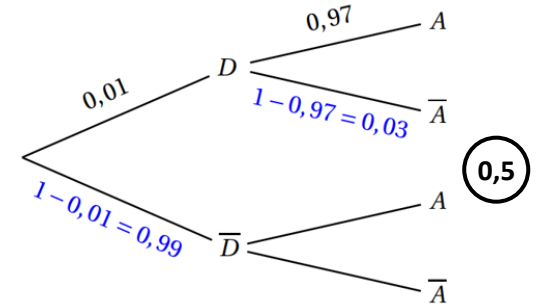
5. a. D'après l'étude précédente, le nombre d'individu décroît et tend vers 0 : l'espèce est donc bien menacée. (0,25)

b. On obtient $n = 11$.

Cela signifie que l'espèce sera menacée d'extinction en 2031. (0,5)

EXERCICE 2 (5 points)**PARTIE A**

1.



$$\begin{aligned}
 2. a. p(D \cap A) &= 0,01 \times 0,97 \\
 &= 0,0097 \quad (0,25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b. p_A(D) &= \frac{p(D \cap A)}{p(A)} \\
 &= \frac{0,0097}{0,01465} \\
 &\approx 0,662 \quad (0,5)
 \end{aligned}$$

$$3. p_{\bar{D}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{D})}{p(\bar{D})}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Or, } p(A) &= p(D \cap A) + p(\bar{D} \cap A) \\
 0,01465 &= 0,0097 + p(\bar{D} \cap A) \\
 0,01465 - 0,0097 &= p(\bar{D} \cap A) \\
 p(\bar{D} \cap A) &= 0,00495
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } p_{\bar{D}}(A) &= \frac{0,00495}{0,99} \\
 &= 0,005 \quad (1)
 \end{aligned}$$

4. Cette situation correspond à $D \cap \bar{A}$ et $\bar{D} \cap A$.

$$\begin{aligned}
 p(D \cap \bar{A}) + p(\bar{D} \cap A) &= 0,01 \times 0,03 + 0,99 \times 0,005 \\
 &= 0,00525 < 0,01 \quad (0,5)
 \end{aligned}$$

PARTIE B

1. On a une répétition de cinq expériences assimilées à un tirage avec remise donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0,00525)$. (0,5)

$$2. p(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,00525^1 \times (1 - 0,00525)^4 \approx 0,0257 \quad (0,5)$$

$$3. p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0,00525^0 \times (1 - 0,00525)^5 = 0,0260 \quad (0,75)$$

PARTIE C

On obtient $n = 14$. (0,5)

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} e^x + 1 = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ par quotient} \quad (0,5)$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 4 \text{ par quotient}$$

2. On observe des asymptotes horizontales d'équations $y = 0$ (en $+\infty$) et $y = 4$ (en $-\infty$) (0,25)

3. Le signe de $f''(x)$ dépend de $e^x - 1$ car $4e^x > 0$ et $e^x + 1 > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$

On a donc un unique point d'inflexion en $x = 0$. (0,5)

Partie B

$$1. g(x) = e^x - xe^x + 1 = e^x(1 - x) + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ par produit. (0,25)

On a ensuite $\lim_{n \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ par croissances comparées.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow -\infty} g(x) = 1 \text{ par somme.} \quad (0,25)$$

$$2. \text{ a. } g'(x) = e^x - (1 \times e^x + x \times e^x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x \quad (0,25)$$

b. Le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $-x$ car $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$-$
$g(x)$	1	2	$-\infty$

$$g(0) = e^0 - 0e^0 + 1 = 1 - 0 + 1 = 2$$

3. a. Sur $] -\infty; 0]$, $g(x) \geq 1$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution (0,25)

1 n'est pas le « minimum » de $g(x)$ car $g(x)$ n'atteint jamais 1... On peut dire que g est minorée par 1.

Sur $]0; +\infty]$, g est continue et strictement croissante.

De plus, $g(0) = 2 > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty < 0$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty]$.

Ainsi, on a donc bien une unique solution sur $\mathbb{R}$. (0,5)

b. On obtient $1,27 < \alpha < 1,28$. (0,25)

c. On sait que $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0$.

$$\text{D'où } e^\alpha(1 - \alpha) = -1$$

$$e^\alpha = \frac{-1}{1 - \alpha}$$

$$e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1} \quad (0,25)$$

$$4. \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & -\infty & \alpha & +\infty \\ \hline g(x) & + & - & \\ \hline \end{array} \quad (0,25)$$

Partie C

1. $M(x; f(x))$, $B(x; 0)$ et $U(0; f(x))$. (0,25)

$$2. \text{ a. } A(x) = x \times f(x) = \frac{4x}{e^x + 1} \quad (0,25)$$

$$\text{ b. } A'(x) = \frac{4(e^x + 1) - 4xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4(e^x + 1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2} \quad (0,5)$$

c. $A'(x)$ est du signe de $g(x)$ car $(e^x + 1)^2 > 0$.

x	0	α	$+\infty$
$A'(x)$		+	-
$A(x)$			

(0,25)

d. D'après le tableau précédent, $A(x)$ est maximale lorsque $x = \alpha$.

L'aire du rectangle $OBMU$ est donc maximale lorsque $x = \alpha$. (0,25)

3. Lorsque $x = \alpha$, la tangente à la courbe C_f a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

$$f'(\alpha) = \frac{-4e^\alpha}{(e^\alpha + 1)^2}$$

Par ailleurs, le coefficient directeur de (BU) est :

$$\frac{y_B - y_U}{x_B - x_U} = \frac{0 - f(\alpha)}{\alpha - 0}$$

$$= \frac{-4}{e^\alpha + 1}$$

$$= \frac{\alpha}{-4}$$

$$f'(\alpha) - \frac{y_B - y_U}{x_B - x_U} = \frac{-4e^\alpha}{(e^\alpha + 1)^2} - \frac{-4}{\alpha(e^\alpha + 1)}$$

$$= \frac{-4\alpha e^\alpha + 4(e^\alpha + 1)}{\alpha(e^\alpha + 1)^2}$$

$$= \frac{4(-\alpha e^\alpha + e^\alpha + 1)}{\alpha(e^\alpha + 1)^2}$$

$$= \frac{4g(\alpha)}{\alpha(e^\alpha + 1)^2}$$

$$= 0$$

La tangente à la courbe C_f en son point d'abscisse α et la droite (BU) sont donc bien parallèles. (0,5)

EXERCICE 4 (4 points)

Question 1

Nombre de choix pour un élève de seconde :

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{(12-3)!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220 \quad (0,5)$$

Question 2

Nombre de bureaux possibles : $\mathcal{A}_{35}^3 = 35 \times 34 \times 33 = 39\,270$

Nombre de bureaux avec une femme présidente : $16 \times 34 \times 33 = 17\,952$ (0,75)

Question 3

Supposons que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w} : \begin{cases} a + 5b = -7 \\ -2a - 4b = 2 \\ 3a - b = 11 \end{cases} \quad (:2)$

En particulier, $\begin{cases} a + 5b = -7 \\ -a - 2b = 1 \end{cases}$

$$L_1 + L_2 : 3b = -6$$

$$3b = \frac{-6}{3} = -2$$

$$L_1 : a = -7 - 5 \times (-2) = 3$$

$$\text{On vérifie } L_3 : 3a - b = 3 \times 3 - (-2) = 9 + 2 = 11$$

Donc $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$: les vecteurs ne forment donc pas une base de l'espace. (1)

Question 4

Par projection orthogonale de H en E sur (EA) et par projection orthogonale de B en A sur (EA), on a :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EA} = -a^2 \quad (0,75)$$

Question 5

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{CJ} &= (\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FI}) \cdot (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GJ}) \\ &= \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{GJ} \\ &= 0 + 0 + \overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2} \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{GJ} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2} \overrightarrow{FE} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{FE} \\ &= -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} a^2 \\ &= -\frac{1}{4} a^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Autre méthode :

On considère le repère orthonormé $\left(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}, \frac{\overrightarrow{AE}}{AE}\right)$

H(0; a; a) et I $\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{HI} \left(\frac{a}{2}; -a; -\frac{a}{2}\right)$; C(a; a; 0) et J $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a\right)$ donc $\overrightarrow{CJ} \left(\frac{-a}{2}; \frac{-a}{2}; a\right)$

$$\text{On en déduit } \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{CJ} = -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{4}$$