

MATHEMATIQUES N°6

Remarques : pour finir le trimestre en beauté ... ou pas !

Exercice 1 : (4,5 points)

- a. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 28 \\ -49 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
b. Les vecteurs $\vec{i} \begin{pmatrix} 3 \\ -1,2 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
- a. Les points $A(-5 ; -5)$, $B(1 ; -1)$ et $C(7 ; 2)$ sont-ils alignés ?
b. On donne $E(2 ; 5)$. Déterminer le point $D(x ; 3)$ tel que $(AB) \parallel (DE)$

Exercice 2 : (5 points)

- Les nombres $A = 654\,321$ et $B = 74\,502\,281\,325$ sont-ils premiers ?
- a. Donner la liste des nombres premiers compris entre 0 et 35.
b. En détaillant la démarche, déterminer si les nombres suivants sont ou non des nombres premiers : $C = 541$ et $D = 893$.
- En détaillant les étapes, décomposer en produit de facteurs premiers :
 $E = 2\,464$ $F = 2\,925$

Exercice 3 : (5,5 points)

- Montrer que si a est un multiple de 5, alors 5 est un diviseur de $7a + 15$.
- Soient b un multiple de 6 et c un multiple de 15.
a. Montrer que $b + c$ est un multiple de 3.
b. Montrer que $b \times c$ est un multiple de 10.
- a. Effectuer la division euclidienne de 7 287 par 15. *Pas de justification demandée.*
b. Effectuer la division euclidienne de -277 par 8. *Pas de justification demandée.*
- Déterminer la liste des diviseurs de 24.
- Déterminer le plus grand nombre entier pair, inférieur à 3 000, divisible par 5 et par 7, et multiple de 13.

Exercice 4 : (2 points)

On sait que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que $3 + \sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 5 : (3 points)

Démontrer que $G = (n + 5)(n + 8)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pourra distinguer deux cas...

MATHEMATIQUES N°6

Remarques : pour finir le trimestre en beauté ... ou pas !

Exercice 1 : (4,5 points)

- a. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 28 \\ -49 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
b. Les vecteurs $\vec{i} \begin{pmatrix} 3 \\ -1,2 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
- a. Les points $A(-5 ; -5)$, $B(1 ; -1)$ et $C(7 ; 2)$ sont-ils alignés ?
b. On donne $E(2 ; 5)$. Déterminer le point $D(x ; 3)$ tel que $(AB) \parallel (DE)$

Exercice 2 : (5 points)

- Les nombres $A = 654\,321$ et $B = 74\,502\,281\,325$ sont-ils premiers ?
- a. Donner la liste des nombres premiers compris entre 0 et 35.
b. En détaillant la démarche, déterminer si les nombres suivants sont ou non des nombres premiers : $C = 541$ et $D = 893$.
- En détaillant les étapes, décomposer en produit de facteurs premiers :
 $E = 2\,464$ $F = 2\,925$

Exercice 3 : (5,5 points)

- Montrer que si a est un multiple de 5, alors 5 est un diviseur de $7a + 15$.
- Soient b un multiple de 6 et c un multiple de 15.
a. Montrer que $b + c$ est un multiple de 3.
b. Montrer que $b \times c$ est un multiple de 10.
- a. Effectuer la division euclidienne de 7 287 par 15. *Pas de justification demandée.*
b. Effectuer la division euclidienne de -277 par 8. *Pas de justification demandée.*
- Déterminer la liste des diviseurs de 24.
- Déterminer le plus grand nombre entier pair, inférieur à 3 000, divisible par 5 et par 7, et multiple de 13.

Exercice 4 : (2 points)

On sait que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que $3 + \sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 5 : (3 points)

Démontrer que $G = (n + 5)(n + 8)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pourra distinguer deux cas...

MATHEMATIQUES N°6

Exercice 1 : (4,5 points)

1. a. On observe que $\vec{v} = -7\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. (0,5)

b. $\det(\vec{i}, \vec{j}) = 3 \times 2 - (-1, 2) \times (-5)$
 $= 6 - 6$
 $= 0$ donc $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires. (0,5)

2. a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-5) \\ -1 - (-5) \end{pmatrix} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 7 - (-5) \\ 2 - (-5) \end{pmatrix} \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$
 $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 6 \times 7 - 4 \times 12$
 $= 42 - 48$
 $= -6 \neq 0$ donc A, B et C ne sont pas alignés. (1,5)

b. $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 2 - x \\ 5 - 3 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 2 - x \\ 2 \end{pmatrix}$
Il faut que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = 0$ c'est-à-dire $6 \times 2 - 4(2 - x) = 0$
 $12 - 8 + 4x = 0$
 $4x = -4$ et donc $x = -1$

Donc $D(-1; 3)$. (2)

Exercice 2 : (5 points)

1. On a $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$
Or, 21 est dans la table de 3 donc 123 456 est dans la table de 3 : ce n'est donc pas un nombre premier. (0,5)

Quant à 74 502 281 325, il se termine par un 5 donc il est divisible par 5 : ce n'est donc pas un nombre premier. (0,5)

2. a. La liste demandée est 2 / 3 / 5 / 7 / 11 / 13 / 17 / 19 / 23 / 29 / 31 (1)

b. $\sqrt{541} \approx 23,3$. On vérifie alors que 541 n'est pas divisible par 2 / 3 / 5 / 7 / 11 / 13 / 17 / 19 / 23, et on en déduit que 541 est un nombre premier (1)

Quant à 893, on a $893 = 19 \times 47$: ce n'est donc pas un nombre premier. (0,5)

3. $E = 2\,464$
 $= 1\,232 \times 2$
 $= 616 \times 2 \times 2$
 $= 308 \times 2 \times 2 \times 2$
 $= 154 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
 $= 77 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
 $= 2^5 \times 7 \times 11$ (0,75)

$F = 2\,925$
 $= 5 \times 585$
 $= 5 \times 5 \times 117$
 $= 5 \times 5 \times 117$
 $= 5 \times 5 \times 3 \times 39$
 $= 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 13$
 $= 3^2 \times 5^2 \times 13$ (0,75)

Exercice 3 : (5,5 points)

1° On peut écrire $a = 5k$ où $k \in \mathbb{Z}$

On a alors $7a + 15 = 7 \times 5k + 5 \times 3$
 $= 5(7k + 3)$

Donc 5 est un diviseur de $7a + 15$. (1)

2° On peut écrire $b = 6x$ où $x \in \mathbb{Z}$ et écrire $c = 15y$ où $y \in \mathbb{Z}$

a. $b + c = 6x + 15y = 3(2x + 5y)$ (1)

b. $b \times c = 6x \times 15y = 90xy = 10 \times 9xy$ (1)

3. a. $7\,287 = 15 \times 485 + 12$ (0,5)

b. $-277 = 8 \times (-35) + 3$ (0,5)

4. $1 / 2 / 3 / 4 / 6 / 8 / 12 / 24$ (0,5)

5. $2 \times 5 \times 7 \times 13 = 910$ convient mais ce n'est pas le plus grand possible.

$3 \times 910 = 2\,730$ est le plus grand possible. (1)

Exercice 4 : (2 points)

Supposons que $3 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

On aurait alors $\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 3$
 $= \frac{a - 3b}{b}$

Or, $(a - 3b) \in \mathbb{Z}$ donc $\sqrt{2}$ s'écrit comme un rationnel : absurde.

Donc $3 + \sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. (2)

Exercice 5 : (3 points)

1^{er} cas : supposons n pair, c'est-à-dire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$G = (n + 5)(n + 8)$
 $= (2k + 5)(2k + 8)$
 $= (2k + 5)2(k + 4)$

Donc G est pair. (1,5)

2nd cas : supposons n impair, c'est-à-dire $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$G = (n + 5)(n + 8)$
 $= (2k + 1 + 5)(2k + 1 + 8)$
 $= (2k + 6)(2k + 9)$
 $= 2(k + 3)(2k + 9)$

Donc G est pair. (1,5)