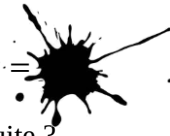


MATHEMATIQUES N°6

Remarques : pour terminer le trimestre en beauté ... ou pas !

Exercice 1 : (1,5 points)

(u_n) est une suite arithmétique de 1^{er} terme $u_1 = 5$ et de raison $r =$ 
Ludo a trouvé que $u_{736} = 495$.
En expliquant la démarche, peux-tu retrouver la raison de cette suite ?

Exercice 2 : (4,5 points)

Caro dispose de 1 000 € qu'elle décide de déposer le 1^{er} janvier 2026 sur un compte bancaire qui rapporte 2,5% d'intérêts pas an. Et chaque année, juste après avoir touché ses intérêts, elle rajoute 100 € sur son compte.

On note u_n la somme dont elle dispose l'année 2026 + n .

- Justifier que $u_{n+1} = 1,025u_n + 100$
- De quelle somme disposera-t-elle le 1^{er} janvier 2027 ? Et le 1^{er} janvier 2028 ?
- On introduit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 4\,000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Démontrer que (v_n) est géométrique de raison 1,025.
 - Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis de u_n en fonction de n .
- De combien disposera-t-elle le 1^{er} janvier 2051 au centime près ?

Exercice 3 : (7 points)

M Babel souhaite bâtir une tour. Le 1^{er} étage lui coûte 100 000 €. Le 2^{ème} étage lui coûte 120 000 €, le 3^{ème} étage 140 000 € et ainsi de suite en augmentant de 20 000 € à chaque nouvel étage. On note u_n le prix que coûte le $n^{\text{ème}}$ étage.

- Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
 - Vérifier que $u_n = 80\,000 + 20\,000n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Combien coûtera le 40^{ème} étage ?
 - Combien coûtera au total une tour de 40 étages ?
- M Babel dispose d'un budget de 60 000 000 € : il souhaite savoir combien d'étages il va pouvoir construire en tout avec cette somme...
 - En expliquant, montrer que cela revient à résoudre $n^2 + 9n - 6\,000 \leq 0$
 - Indiquer alors combien d'étages sa tour pourra compter.

Exercice 4 : (4 points)

- Calculer $S_1 = 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + \dots + 3\,039$ (rédigier, expliquer !)
- Calculer $S_2 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 32\,768$ (rédigier, expliquer !)

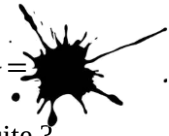
Exercice 5 : (3 points)

- Sachant que $\cos x = -0,7$ et que $x \in [\pi ; 2\pi[$, déterminer la valeur de $\sin x$.
- On sait que $\cos x = -0,3$ et $x \in [180 ; 360[$. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de x au dixième de degré près.

MATHEMATIQUES N°6

Remarques : pour terminer le trimestre en beauté ... ou pas !

Exercice 1 : (1,5 points)

(u_n) est une suite arithmétique de 1^{er} terme $u_1 = 5$ et de raison $r =$ 
Ludo a trouvé que $u_{736} = 495$.
En expliquant la démarche, peux-tu retrouver la raison de cette suite ?

Exercice 2 : (4,5 points)

Caro dispose de 1 000 € qu'elle décide de déposer le 1^{er} janvier 2026 sur un compte bancaire qui rapporte 2,5% d'intérêts pas an. Et chaque année, juste après avoir touché ses intérêts, elle rajoute 100 € sur son compte.

On note u_n la somme dont elle dispose l'année 2026 + n .

- Justifier que $u_{n+1} = 1,025u_n + 100$
- De quelle somme disposera-t-elle le 1^{er} janvier 2027 ? Et le 1^{er} janvier 2028 ?
- On introduit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 4\,000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Démontrer que (v_n) est géométrique de raison 1,025.
 - Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis de u_n en fonction de n .
- De combien disposera-t-elle le 1^{er} janvier 2051 au centime près ?

Exercice 3 : (7 points)

M Babel souhaite bâtir une tour. Le 1^{er} étage lui coûte 100 000 €. Le 2^{ème} étage lui coûte 120 000 €, le 3^{ème} étage 140 000 € et ainsi de suite en augmentant de 20 000 € à chaque nouvel étage. On note u_n le prix que coûte le $n^{\text{ème}}$ étage.

- Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
 - Vérifier que $u_n = 80\,000 + 20\,000n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Combien coûtera le 40^{ème} étage ?
 - Combien coûtera au total une tour de 40 étages ?
- M Babel dispose d'un budget de 60 000 000 € : il souhaite savoir combien d'étages il va pouvoir construire en tout avec cette somme...
 - En expliquant, montrer que cela revient à résoudre $n^2 + 9n - 6\,000 \leq 0$
 - Indiquer alors combien d'étages sa tour pourra compter.

Exercice 4 : (4 points)

- Calculer $S_1 = 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + \dots + 3\,039$ (rédigier, expliquer !)
- Calculer $S_2 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 32\,768$ (rédigier, expliquer !)

Exercice 5 : (3 points)

- Sachant que $\cos x = -0,7$ et que $x \in [\pi ; 2\pi[$, déterminer la valeur de $\sin x$.
- On sait que $\cos x = -0,3$ et $x \in [180 ; 360[$. A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de x au dixième de degré près.

MATHEMATIQUES N°6

Exercice 1 : (1,5 points)

On a $u_{736} = u_1 + (736 - 1) \times r$

$$495 = 5 + 735r$$

$$495 - 5 = 735r$$

$$490 = 735r$$

$$\frac{490}{735} = r$$

$$\frac{2}{3} = r$$

La raison de la suite est donc $\frac{2}{3}$ (1,5)

Exercice 2 : (4,5 points)

1. Les 2,5% d'intérêts pas an donnent la multiplication $1,025u_n$. Et puisqu'elle ajoute ensuite 100 €, on ajoute 1100 donc $u_{n+1} = 1,025u_n + 100$ (0,5)

2. Le 1^{er} janvier 2027 correspond à u_1 :

$$u_1 = 1,025 \times 1\,000 + 100$$

$$= 1\,025 + 100$$

$$= 1\,125 \text{ €}$$

Et le 1^{er} janvier 2028 correspond à u_2 : (1)

$$u_2 = 1,025 \times 1\,125 + 100$$

$$= 1\,153,125 + 100$$

$$\approx 1\,253,13 \text{ €}$$

3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} + 4\,000$

$$= 1,025u_n + 100 + 4\,000$$

$$= 1,025(v_n - 4\,000) + 4\,100$$

$$= 1,025v_n - 4\,100 + 4\,100$$

$$= 1,025v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 1,025. (1,5)

b. On a $v_0 = u_0 + 4\,000$

$$= 1\,000 + 4\,000$$

$$= 5\,000$$

$$\text{Donc } v_n = 5\,000 \times 1,025^n \text{ (0,75)}$$

$$\text{D'où } u_n = 5\,000 \times 1,025^n - 4\,000 \text{ (0,25)}$$

4. Le 1^{er} janvier 2051 correspond à $n = 25$.

$$u_{25} = 5\,000 \times 1,025^{25} - 4\,000$$

$$\approx 5\,269,72$$

Elle disposera donc de 5 269,72 € le 1^{er} janvier 2051. (0,5)

Exercice 3 : (7 points)

1. a. (u_n) est arithmétique de raison 20 000 et de 1^{er} terme $u_1 = 100\,000$ car à chaque étage le coût augmente de 20 000 €. (0,5)

b. On a alors $u_n = u_1 + (n - 1) \times 20\,000$

$$= 100\,000 + 20\,000n - 20\,000$$

$$= 80\,000 + 20\,000n \text{ (1)}$$

2. a. $u_{40} = 80\,000 + 20\,000 \times 40$

$$= 880\,000$$

Le 40^{ème} étage coûtera 880 000 €. (0,5)

$$b. S = 40 \times \frac{100\,000 + 880\,000}{2}$$

$$= 19\,600\,000$$

Une tour de 40 étages coûte donc 19 600 000 € (1)

3. a. Notons n le nombre d'étages.

On doit résoudre :

$$n \times \frac{100\,000 + u_n}{2} \leq 60\,000\,000$$

$$n \times \frac{100\,000 + 80\,000 + 20\,000n}{2} \leq 60\,000\,000$$

$$n \times \frac{180\,000 + 20\,000n}{2} \leq 60\,000\,000$$

$$n(90\,000 + 10\,000n) \leq 60\,000\,000$$

$$n(9 + 1n) \leq 6\,000$$

$$n^2 + 9n - 6\,000 \leq 0 \text{ (2)}$$

b. $\Delta = 9^2 - 4 \times 1 \times (-6\,000)$

$$= 81 + 24\,000$$

$$= 24\,081$$

$$\text{D'où : } n_1 = \frac{-9 - \sqrt{24\,081}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-9 + \sqrt{24\,081}}{2 \times 1}$$

$$\approx -82,09$$

$$\approx 73,09$$

Entre ces racines, le trinôme est négatif.

Ainsi, on peut dire qu'il peut construire jusqu'à 73 étages. (2)

Exercice 4 : (4 points)

1. Je pose $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 4$

C'est une suite arithmétique de raison 4 :

$$u_n = 3 + 4(n - 1)$$

$$= 3 + 4n - 4$$

$$= 4n - 1$$

Il faut savoir à quel rang correspond 3 039 :

$$3\,039 = 4n - 1$$

$$3\,039 + 1 = 4n$$

$$\frac{3\,040}{4} = n$$

$$760 = n$$

Le calcul à faire est donc $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{760}$ et cela fait :

$$760 \times \frac{3 + 3\,039}{2} = 1\,155\,960 \quad (2,5)$$

2. Je pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$

C'est une suite géométrique de raison 2 :

$$u_n = 1 \times 2^n = 2^n$$

$$= 2^n$$

Or, $2^{15} = 32\,768$: le dernier terme est donc u_{15} .

Le calcul à faire est donc $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{15}$ et cela fait :

$$1 \times \frac{1 - 2^{16}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{16}}{-1}$$
$$= 2^{16} - 1$$
$$= 65\,535 \quad (1,5)$$

Exercice 5 : (3 points)

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$(-0,7)^2 + \sin^2 x = 1$$

$$0,49 + \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - 0,49$$

$$\sin^2 x = 0,51$$

$$\sin x = \sqrt{0,51} \text{ ou } \sin x = -\sqrt{0,51}$$

Or, $x \in [\pi ; 2\pi[$ donc $\sin x \leq 0$.

$$\text{Donc } \sin x = -\sqrt{0,51} \quad (2)$$

2. On a $x = \cos^{-1}(-0,3) \approx 107,46^\circ$

Sauf que... ce n'est pas dans le bon intervalle ! 😬

L'explication se trouve sur le cercle : $\cos x = -0,3$ admet deux solutions symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Donc $x \approx -107,46^\circ$ est également une solution.

$$\text{Et } -107,46 + 360 = 252,54^\circ \quad (1)$$