

MATHEMATIQUES N°5

Remarques : du classique : de quoi engranger des points avant le BAC Blanc !

Exercice 1 : (1,5 points) $\begin{cases} f(x) = x^2 + x + c & \text{pour } x \in [-4 ; 2[\\ f(2) = 0 \\ f(x) = -2x^2 + bx - 17 & \text{pour } x \in]2 ; 5] \end{cases}$
Soit f la fonction définie par
Déterminer les valeurs de b et c pour que f soit continue sur $[-4 ; 6]$.

Exercice 2 : (3 points)
On donne P(2 ; 3 ; 4), R(3 ; 0 ; 4), O(5 ; 6 ; 7) et F(8 ; 7 ; 13).
Les points P, R, O, F sont-ils coplanaires ?

Exercice 3 : (2 points)
On considère les points M(1 ; 0 ; 4), AB(2 ; 0 ; 6) et T(3 ; 4 ; 0).
Déterminer les coordonnées du point H tel que MATH soit un parallélogramme.

Exercice 4 : (13,5 points)
1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
a. Dresser le tableau de variations de g .
b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
c. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .
d. En déduire le tableau de signes de la fonction g .
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$
a. Vérifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.
b. Démontrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, on a $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$
c. Dresser le tableau de variations de f .
(ce devrait être une évidence, mais il est toujours possible de vérifier à la calculatrice, après coup...)
d. Déterminer les limites de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers -1 à gauche.

Bonus : (+1,5 points)
1. Quel est le titre de l'article ? 2. Par définition, que vaut π ?
3. Citer un exemple de l'article issu des sciences physiques dans lequel π apparaît.
4. Décrire brièvement l'expérience de l'aiguille de Buffon.
5. Que vaut la somme $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$?
6. Quelle est la formule d'Euler ?

MATHEMATIQUES N°5

Remarques : du classique : de quoi engranger des points avant le BAC Blanc !

Exercice 1 : (1,5 points) $\begin{cases} f(x) = x^2 + x + c & \text{pour } x \in [-4 ; 2[\\ f(2) = 0 \\ f(x) = -2x^2 + bx - 17 & \text{pour } x \in]2 ; 5] \end{cases}$
Soit f la fonction définie par
Déterminer les valeurs de b et c pour que f soit continue sur $[-4 ; 6]$.

Exercice 2 : (3 points)
On donne P(2 ; 3 ; 4), R(3 ; 0 ; 4), O(5 ; 6 ; 7) et F(8 ; 7 ; 13).
Les points P, R, O, F sont-ils coplanaires ?

Exercice 3 : (2 points)
On considère les points M(1 ; 0 ; 4), AB(2 ; 0 ; 6) et T(3 ; 4 ; 0).
Déterminer les coordonnées du point H tel que MATH soit un parallélogramme.

Exercice 4 : (13,5 points)
1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
a. Dresser le tableau de variations de g .
b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
c. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .
d. En déduire le tableau de signes de la fonction g .
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$
a. Vérifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.
b. Démontrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, on a $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$
c. Dresser le tableau de variations de f .
(ce devrait être une évidence, mais il est toujours possible de vérifier à la calculatrice, après coup...)
d. Déterminer les limites de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers -1 à gauche.

Bonus : (+1,5 points)
1. Quel est le titre de l'article ? 2. Par définition, que vaut π ?
3. Citer un exemple de l'article issu des sciences physiques dans lequel π apparaît.
4. Décrire brièvement l'expérience de l'aiguille de Buffon.
5. Que vaut la somme $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$?
6. Quelle est la formule d'Euler ?

MATHEMATIQUES N°5

Exercice 1 : (1,5 points)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2^2 + 2 + c = 6 + c$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2 \times 2^2 + b \times 2 - 17 = 2b - 25$$

Il faut donc que $6 + c = 0 = 2b - 25$

D'où $c = -6$ et $b = 12,5$

(1,5)

Exercice 2 : (3 points)

$$\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-3 \\ 4-4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PO} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 6-3 \\ 7-4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PF} \begin{pmatrix} 8-2 \\ 7-3 \\ 13-4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PO} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PF} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Supposons que } \overrightarrow{PO} = x\overrightarrow{PR} + y\overrightarrow{PF} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = x + 6y \\ 3 = -3x + 4y \\ 3 = 9y \end{cases}$$

$$L_3 : y = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$L_1 : 3 = x + 6 \times \frac{1}{3}$$

$$3 = x + 2$$

$$x = 3 - 2 = 1$$

Reste à vérifier L_2 :

$$-3 \times 1 + 4 \times \frac{1}{3} = -3 + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \neq 3$$

Le système n'a pas de solution donc P, R, O et F ne sont pas coplanaires.

(3)

Exercice 3 : (2 points)

Pour que ce soit un parallélogramme, il faut que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{HT}$. Notons $G(x; y; z)$.

$$\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-0 \\ 6-4 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HT} \begin{pmatrix} 3-x \\ 4-y \\ 0-z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = 3 - x \\ 0 = 4 - y \\ 2 = 0 - z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - 1 = 2 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

D'où $H(2; 4; -2)$.

(2)

Exercice 4 : (13,5 points)

1. a. $g'(x) = 3x^2 - 3$

$$= 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$		-1	-5		

(2)

b. Sur $] -\infty; 1]$, le maximum de g vaut -1 donc $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

(1)

Sur $[1; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante.

De plus, $g(1) = -5 < 0$ et $g(3) = 15 > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur $[1; +\infty[$, et donc dans $\mathbb{R}$.

(2,5)

c. A l'aide de la calculatrice, on obtient $2,103 < \alpha < 2,104$.

(1)

d.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(0,5)

2. a. Pour que $f(x)$ existe, il faut que $x^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

(0,5)

$$b. f'(x) = \frac{2 \times 3x^2(x^2 - 1) - 2x(2x^3 + 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4 - 6x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^3 - 3x - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

(2)

c. $f'(x)$ a le même signe que $2xg(x)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$	
x	-	-	0	+	+	+	
$g(x)$	-	-	-	-	0	+	
$f'(x)$	+	+	0	-	-	0	+
$f(x)$			 -3 		 		

(2,5)

$$d. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

0,5

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2x^3 + 3 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x^2 - 1 = 0^+$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$$

1

Bonus :

1. Il est partout !
2. C'est le quotient du périmètre d'un cercle sur son diamètre OU le quotient de l'aire d'un disque sur le carré de son rayon
3. Période d'un pendule, mouvement d'un ressort, loi de Coulomb (valeur d'une force électrostatique), loi de Biot et Savart (champ magnétique)
4. On considère une chambre dont le parquet est formé de lames parallèles et on laisse tomber une aiguille sur le plancher. On cherche alors la probabilité pour que celle-ci tombe à cheval sur l'une des rainures séparant les lames du parquet... et π apparaît dans la réponse.
5. $\frac{\pi^2}{6}$
6. $e^{i\pi} + 1 = 0$