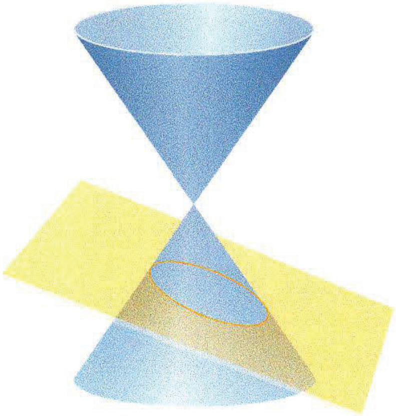
par Guy Porthault

Il est partout !

On retrouve π un peu partout, parfois même dans des domaines fantaisistes. En mathématiques, on le croise bien sûr en géométrie, on le rencontre en analyse, on l'aperçoit en théorie des nombres... Conséquence de cette omniprésence, il apparaît dans toutes les autres sciences !



Le nombre π étant par définition le quotient du périmètre d'un cercle sur son diamètre, ou le quotient de l'aire d'un disque sur le carré de son rayon, il semble évident qu'il apparaisse dans de nombreuses formules donnant des surfaces ou des volumes : aire d'une sphère, aire latérale d'un cylindre, aire latérale d'un cône, volume d'une boule, volume d'un cylindre, volume d'un cône... Mais il permet aussi de déterminer l'aire d'une ellipse à partir de la longueur des axes ainsi que le volume des ellipsoïdes. Ce qui en soit n'est pas surprenant puisque les ellipses sont des coniques et peuvent donc être définies comme projections centrales d'un cercle sur un plan.
On le rencontre également dans de nombreux problèmes de géométrie plane mettant en jeu des triangles puisque la somme des trois angles d'un triangle vaut π (en radians). Son utilisation en trigonométrie permet également d'aboutir aux nombreuses formules permettant le calcul de ses décimales par des arcs tangentes (voir page 26).

En physique

La constante π apparaît dans de nombreuses formules de physique, ce qui témoigne de leur origine géométrique. Par exemple :

- la période T d'un pendule simple de longueur l dans un champ de pesanteur g est donnée par $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$;
- la période T du mouvement d'un ressort de raideur k auquel est suspendue une masse m est fournie par $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Ici, le coefficient 2π vient tout simplement du fait que ces mouvements sont sinusoïdaux et que les fonctions sinusoïdales sont périodiques de période 2π. En fait, les problèmes de physique se ramènent très souvent à des équations différentielles : dans ces problèmes d'oscillateurs harmoniques, les solutions sont alors sinusoïdales. On trouve le même genre de formule pour les oscillateurs électriques.

En électricité, selon la loi de Coulomb, la valeur de la force électrostatique F qui s'exerce entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2, distantes de r, s'exprime par $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$, où ε_0 est une constante appelée la *permittivité électrique du vide*.

En mécanique quantique aussi

L'un des aspects les plus importants et surprenants de la mécanique quantique est le *principe d'incertitude de Heisenberg* : il est impossible de connaître simultanément la position x et la quantité de mouvement $p = mv$ d'une particule avec une précision infinie.

L'incertitude sur la position Δx et celle sur la quantité de mouvement Δp doivent respecter la relation d'incertitude $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$, où h est la *constante de Planck*. Ici encore, le π provient de la dualité onde-particule, et donc de la présence d'une onde périodique. Les grandeurs reliées par une telle relation d'incertitude sont dites *conjuguées* ; l'énergie E et le temps t sont elles aussi soumises à cette contrainte : $\Delta E \, \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$.

On peut s'interroger sur la provenance de π dans cette formule. En fait, la force exercée sur la seconde charge est due au champ électrique créé par la première. Or, ce champ électrique se répartit au fur et à mesure de l'éloignement sur une sphère de surface $4\pi r^2$.

La *loi de Biot et Savart*, quant à elle, permet de calculer le champ magnétique B créé à une distance r d'un fil infiniment long et rectiligne parcouru par un courant électrique d'intensité I, et énonce la relation $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Ici, μ est la *perméabilité magnétique du vide* et le π provient d'un raisonnement analogue au précédent cas.

Également en astronomie

Quand un objet tourne en orbite autour d'une masse centrale, par exemple la Terre autour du Soleil, la période T de l'objet en orbite autour de la masse M est donnée par $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(M+m)}}$, où a est la distance moyenne entre les deux objets (le demi-grand axe de l'orbite), G est la constante de la gravitation universelle et m est la masse de l'objet en orbite. Cette formule, où π est encore présent, provient de la *troisième loi de Kepler*, selon laquelle le rapport T^2/a^3 reste constant, et est valable pour les orbites circulaires et elliptiques. Elle est assez facile à démontrer pour les mouvements circulaires et se simplifie d'ailleurs en $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$, si l'on considère que l'objet en orbite a une masse « beaucoup plus petite » que l'objet central.

L'aiguille de Buffon

Dans cette expérience classique, on considère une chambre dont le parquet est formé de lames parallèles. On laisse tomber une aiguille sur le plancher. Quelle est la probabilité pour que celle-ci tombe à cheval sur l'une des rainures séparant les lames du parquet ? Ce problème apparaît dans l'*Essai d'arithmé-*

Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788).

Ernesto Cesàro (1859-1906).

tique morale, publié en 1733 par le naturaliste et mathématicien Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon, plus connu sous ce nom. Il étudie d'abord la probabilité de gagner au *jeu du franc carreau*, qui consiste à laisser tomber une pièce de monnaie sur un carrelage et à parier sur la position finale de la pièce : à cheval sur l'un des bords du carreau ou entièrement à l'intérieur d'un carreau (il faut évidemment que la pièce soit plus petite que le carré de base du carrelage). Buffon calcule la probabilité de gagner à ce jeu (qui utilise évidemment π, puisque la pièce est circulaire) puis étend son étude au problème d'une aiguille lancée au hasard sur le parquet. La probabilité que l'aiguille touche l'une des rainures est plus compliquée à évaluer, puisque, en sus de l'endroit où tombera le centre de l'aiguille, il faut aussi tenir compte de son orientation. Buffon obtient que la probabilité qu'une aiguille de longueur a (inférieure à la largeur l des lames) tombe à cheval sur deux lames est $2a/\pi l$.

Outre le fait que l'on peut trouver expérimentalement la valeur de π par cette méthode (de façon peu efficace, il est vrai), ce problème présente des développements intéressants, notamment si la longueur a de l'aiguille est supérieure à la largeur l des lames du parquet, et encore plus si l'aiguille est souple, voire si elle se referme en boucle. Ainsi l'astronome français Joseph-Émile Barbier (1839-1889), qui étudia ce dernier problème, arriva au même résultat en considérant le cas d'une aiguille de forme circulaire de diamètre l (la largeur des lames) qui coupe toujours une rainure en deux points ou qui est tangente à deux rainures simultanément.

Mais Barbier est surtout connu en mathématiques par « son » théorème, qui donne une propriété étonnante où π intervient encore : *toute courbe de « largeur » constante, comme le cercle, a un périmètre égal à π fois sa largeur*. Ainsi, un cercle de diamètre d et un triangle de Reuleaux (voir encadré page suivante) de « largeur » d ont le même périmètre, à savoir πd.

Avec les nombres premiers

Prenons deux nombres entiers inférieurs à n. Quelle est la probabilité pour qu'ils soient premiers entre eux ? Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ? La réponse à cette question a été donnée en 1883 par un mathématicien italien, Ernesto Cesàro, dans une revue scientifique belge, sous le titre *Étant donnés deux nombres quelconques, il y a environ 61 à parier contre 39 qu'ils soient premiers entre eux*.

Le résultat exact fait intervenir le nombre π, ce qui est quand même assez étonnant puisque, *a priori*, rien ne relie ce nombre transcendant à la théorie des nombres : quand n tend vers l'infini, cette probabilité tend vers $6/\pi^2$, dont une valeur approchée est 0,607927.

Pour démontrer cela, on utilise un résultat, tout aussi étonnant, dû à Leonhard Euler en 1735, donnant la somme des inverses des carrés des entiers naturels :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Une démonstration rigoureuse a été donnée quelques années plus tard. Assez élaborée, elle a, depuis, été légèrement simplifiée.

En fait, ce nombre $\frac{\pi^2}{6}$ est une valeur de la célèbre fonction ζ (« zêta »), dite *de Riemann*, si importante en théorie des nombres, en particulier pour comprendre la répartition des nombres premiers. Elle est nommée ainsi en hommage à Bernhard Riemann, un mathématicien allemand qui l'a étudiée ; elle est définie par :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

La probabilité précédente est donc égale à $1/\zeta(2)$. Ce résultat est généralisable : la probabilité que k entiers inférieurs à n choisis au hasard soient premiers entre eux tend vers $1/\zeta(k)$ quand n tend vers l'infini !

Leonhard Euler avait aussi démontré d'autres égalités de ce genre :

$$\zeta(4) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\zeta(6) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945},$$

et ainsi de suite jusqu'à $\zeta(26)$ pour tous les entiers pairs. En 1739, il parvint même à une formule générale en utilisant les *nombres de Bernoulli* B_{2n} :

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2 \times (2n)!}.$$

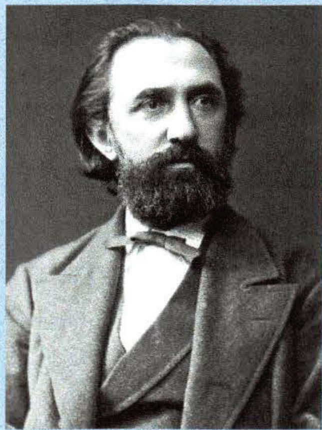
L'apparition de π dans une somme d'inverses de nombres entiers était un coup de tonnerre !

De la même façon, π apparaît dans de nombreuses formules mettant en jeu les nombres complexes (comme la fameuse *formule d'Euler* $e^{i\pi} + 1 = 0$), les suites, les séries et les intégrales. Mais, pour paraphraser Fermat, nous n'avons pas la place ici pour développer ces résultats !

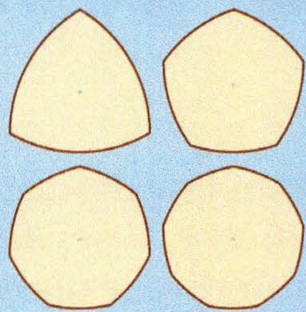
G. P.

Le fameux triangle de Reuleaux

Ce « triangle » est obtenu en traçant trois arcs de cercles, centrés sur les trois sommets d'un triangle équilatéral, et chacun délimité par les deux autres sommets du triangle. On peut généraliser cette construction à des polygones réguliers ayant un nombre impair de côtés. Ils portent tous le nom de l'ingénieur allemand Franz Reuleaux, qui fut l'un des fondateurs du génie mécanique.



Franz Reuleaux (1829-1905).



Quatre polygones de Reuleaux (tous de même « largeur ») construits sur des polygones réguliers à trois (triangle de Reuleaux), cinq, sept et neuf côtés.

Ce sont des courbes planes fermées. Il est possible de définir la *largeur* de telles courbes. Pour une direction donnée, on peut considérer deux droites parallèles (les *lignes d'appui*) qui lui sont tangentes en deux points distincts. La courbe est alors *de largeur constante* si la distance entre les lignes d'appui est indépendante de leur direction. Cette distance est alors appelée *la largeur* de la courbe. Bien évidemment, la largeur d'un cercle est son diamètre au sens habituel !

Le triangle de Reuleaux et, plus généralement, tous les polygones de Reuleaux sont des courbes de largeur constante. Selon le théorème de Barbier, ils ont tous le même périmètre, à savoir πd, où d est leur largeur.

Références

- *Buffon et le hasard en géométrie.* Agnès Desolneux, *Tangente* 180, 2018.
- « Probabilité pour que deux entiers soient premiers entre eux. » Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas, dans *Oraux X-ENS, Algèbre 1*, Cassini, 2012.
- Le site Internet « Les Sorciers de Salem » (**sorciersdesalem.math.cnrs.fr**) propose des animations intéressantes sur le problème de l'aiguille de Buffon.