

# Le latin, source de mots nouveaux

Le développement de l'algèbre linéaire fut la source de vocables nouveaux, comme « scalaire », ou remis au goût du jour, tel « vecteur ».

## Vous avez dit « linéaire » ?

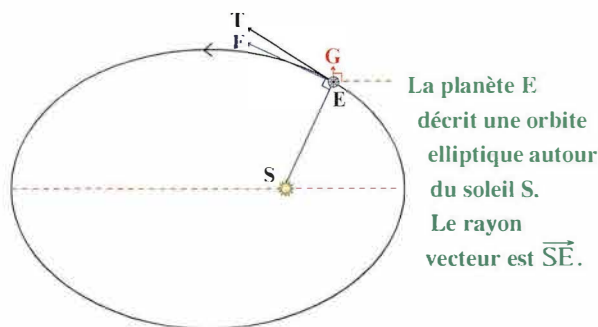
Dans le courant du XIX<sup>e</sup> siècle, le sens du mot « algèbre » prend une dimension nouvelle. D'origine arabe, issu du titre d'un ouvrage du savant persan al-Khwarizmi, le terme désignait depuis Viète et Peletier du Mans l'ensemble des techniques de calcul utilisant ces nombres nouveaux qu'étaient les entiers négatifs, puis les nombres complexes. Les structures mathématiques telles que les groupes, les anneaux ou les corps sont conçues à l'origine comme des extensions de la notion de nombre et se rangent tout naturellement sous l'aile de l'algèbre. Plus généralement, tout ce qui se base sur du calcul (opérations d'addition ou multiplication... comme les espaces vectoriels !) se voit classé dans ce même domaine.

Cependant, l'origine géométrique se fait sentir dans la désignation de ces différents concepts, comme le rappelle clairement l'emploi du mot « espace ». De même, dans « linéaire », on devine le mot « ligne ». Issu du latin, *linearis* dénomme ce qui se rapporte à une droite. Il apparaît en français à la Renaissance dans le même sens ; on qualifie depuis de *linéaire* les notions ayant un lien étroit avec les droites (vectorielles dans notre cas), c'est-à-dire possédant une équation du premier degré.

## Un « vecteur » ? Pourquoi ce mot...

Les Romains possédaient déjà le mot *vector*. Issu du verbe *vehere* signifiant « transporter », il désignait aussi bien le passager que le conducteur d'un bateau ou d'un chariot. On retrouve en français cette racine dans les mots français « véhicule », « voiture » ou même « voie » et « invective ». Le français médiéval reprend le sens latin de conducteur d'un bateau ou d'un véhicule, mais le mot tombe vite en désuétude.

C'est sous forme d'adjectif que renaît au XVIII<sup>e</sup> siècle le mot dans l'expression « tourbillon vecteur », puis dans « rayon vecteur ». Sous ce dernier nom, les astronomes désignaient le segment orienté joignant le soleil à une planète, comme s'il lui impulsait lui-même son mouvement. On voit la dérive sémantique vers la petite flèche joignant deux points du plan ou de l'espace : c'est à William Hamilton que l'on doit cette nomenclature, mais c'est sans doute Maxwell qui l'a popularisée. Si, en mathématiques appliquées ou en physique, c'est encore cette notion qui domine, pour ceux qui sont baignés dans l'axiomatique, vecteur nomme un élément d'un espace vectoriel, souvent éloigné de toute interprétation géométrique. Son utilisation en médecine dans le sens de « vecteur d'une maladie » apparaît au début du XX<sup>e</sup> siècle dans le sens latin originel de « conducteur ».



# Expliquer les vecteurs par la géométrie

Dans les mathématiques d'aujourd'hui, on définit les espaces géométriques (espaces affines) à partir des espaces vectoriels. Pourtant, c'est historiquement parlant dans l'autre sens que s'est produite la naissance des espaces vectoriels.

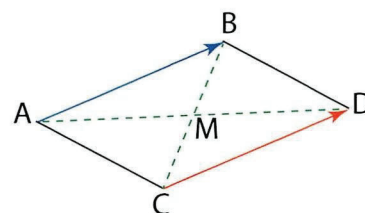
**E**n dehors des nombres, la géométrie a précédé la plupart des notions mathématiques, voire permis leur introduction. Les vecteurs n'échappent pas à la règle.

Pour construire la notion de vecteur, on va donc partir de l'ensemble (P) des points d'un plan ou d'un espace – qu'on appelle aujourd'hui « de dimension 3 » –, dans lequel une géométrie a déjà défini un certain nombre de propriétés classiques, rigoureusement ou de manière intuitive.

## Du bipoint au vecteur

On s'intéresse alors aux *bipoints*, les couples ordonnés de points de (P), de la forme (A, B). On dira que le bipoint (A, B) est *équipollent* au bipoint (C, D)

si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme. Une condition équivalente consiste à dire que les milieux des segments [AD] et [BC] sont confondus (au point M de la figure ci-dessous).



On remarque que cette définition entraîne que les quatre points A, B, C et D sont *coplanaires* (ils sont dans un même plan, même si on travaille en dimension 3).

Les segments [AB] et [CD] correspondant à deux bipoints équipollents sont donc parallèles. On peut ajouter qu'ils sont « de même sens » et, si l'on a défini une distance, qu'ils sont « de même longueur ». Mais cette notion n'est pas utile à ce stade.

Ce qui est intéressant, c'est la constatation que la relation d'équipollence est ce que l'on appelle une relation

**« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. »**

**Henri Poincaré (1854–1912)**

d'équivalence. Elle est en effet :

- *réflexive* : un bipoint est équipollent à lui-même (d'accord, le parallélogramme est aplati, mais c'en est un) ;
- *symétrique* : si  $(A, B)$  est équipollent à  $(C, D)$ , alors  $(C, D)$  est équipollent à  $(A, B)$  ;
- *transitive* : si  $(A, B)$  est équipollent à  $(C, D)$  et  $(C, D)$  à  $(E, F)$ , alors  $(A, B)$  est équipollent à  $(E, F)$ .

À partir d'une relation d'équivalence, on peut définir des *classes d'équivalence*. Ainsi, pour l'équipollence, la classe d'équivalence d'un bipoint  $(A, B)$  est l'ensemble des bipoints équipollents à  $(A, B)$ . On l'appellera dorénavant *vecteur*  $\overrightarrow{AB}$  et on la note  $\vec{AB}$ .

L'ensemble  $E$  des vecteurs ainsi mis en évidence est appelé *espace vectoriel* associé à  $(P)$ .

On pourrait continuer en définissant dès ce stade, à partir de cette introduction de la notion de vecteur, des opérations (et leurs propriétés) sur ce nouvel ensemble  $E$ . Mais on va faire mieux, en utilisant une autre notion fondamentale de la géométrie, celle de transformation. C'est la plus élémentaire des transformations, la translation, qui va être mise à contribution.

### Vecteurs et translations, même combat

On représente souvent les vecteurs en les surmontant d'une flèche. C'est sans doute pour signifier l'idée de déplacement sous-jacente. Si l'on se donne deux points  $A$  et  $B$  du plan ou de l'espace, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  permet de passer de  $A$  à  $B$  ; il représente la translation menant de  $A$  à  $B$ .

Cette représentation cinématique justifie l'addition des vecteurs, comme leur multiplication par un scalaire.



Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  représente la translation menant de  $A$  à  $B$ .

Géométriquement, une translation  $T$  qui transforme un point  $A$  en un point  $B = T(A)$  transforme un point  $C$  en un point  $D = T(C)$  tel que le quadrilatère  $ABDC$  soit un parallélogramme. Ainsi, pour tout point  $M$ , le bipoint  $(M, T(M))$  est équipollent à  $(A, B)$ .

La translation  $T$ , dite *translation de vecteur*  $\overrightarrow{AB}$ , est donc entièrement caractérisée par ce vecteur. Réciproquement, tout vecteur est associé à une unique translation.

De là à identifier translations et vecteurs, il n'y a qu'un pas, que nous allons franchir immédiatement, car cette relation va s'avérer un *isomorphisme*, qui relie non seulement les deux ensembles, mais aussi les opérations que l'on peut définir dessus.

La première opération classique sur l'ensemble des translations est la *composition*. On peut composer deux translations  $T$  et  $T'$ , ce qui donne la translation  $T \circ T'$ .

Cette opération a ce qu'on appelle des *propriétés de groupe abélien* :

- Elle est *commutative*, puisque l'ordre dans lequel on opère deux translations n'affecte pas le résultat ;

- Elle est *associative* ; en effet, on peut composer trois translations dans n'importe quel ordre en obtenant le même résultat :  $(T \circ T') \circ T'' = T \circ (T' \circ T'')$  ;

- Elle admet un *élément neutre*, l'identité  $I_{(P)}$ , qui laisse chaque point du plan  $(P)$  invariant. C'est la translation de vecteur  $\vec{AA}$  (on l'appellera *translation de vecteur nul*), qui vérifie  $I_{(P)} \circ T = T \circ I_{(P)} = T$  ;

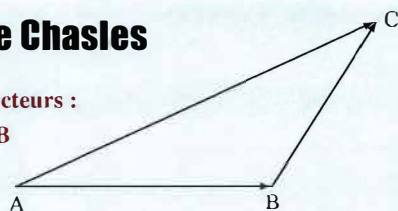
## La relation de Chasles

**Addition de deux vecteurs :**

si  $\vec{AB}$  mène de A à B

et  $\vec{BC}$  de B à C,

alors  $\vec{AB} + \vec{BC}$  mène de A à C, c'est donc  $\vec{AC}$ .



L'une des conséquences de la correspondance entre translations et vecteurs est la relation de Chasles. En effet, si l'on compose la translation qui transforme A en B avec celle qui transforme B en C, on trouve la translation qui transforme A en C. En notation vectorielle, cela s'écrit tout simplement :  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

- Chaque translation T de vecteur  $\vec{V} = \vec{AB}$  admet une *translation symétrique* T' de vecteur  $\vec{BA}$  telle que  $T \circ T' = T' \circ T = I_{(P)}$ .

L'idée géniale va être de transposer cette opération aux vecteurs, en définissant la somme de deux vecteurs à l'aide de la composition de translations. Si  $\vec{V}$  et

$\vec{W}$  sont deux vecteurs, on définira la *somme*  $\vec{V} + \vec{W}$  par le vecteur associé à la composée de la translation de vecteur  $\vec{V}$  et la translation de vecteur  $\vec{W}$ .

À la bijection entre les deux ensembles, on associe donc aussi une correspondance des opérations (ou *isomorphisme*), qui permet d'affirmer que l'ensemble E des vecteurs associés à (P) est muni d'une addition qui lui confère une structure de groupe abélien. Et comme l'élément neutre de l'addition dans un ensemble de nombres est noté 0, on appelle *vecteur nul* (et on note aussi 0) le vecteur  $\vec{AA}$  associé à la translation identité.

## La multiplication externe grâce à l'homothétie

Mais dans un espace vectoriel, il existe une autre opération, dite *multiplication externe*, qui consiste à pouvoir multiplier un vecteur par un nombre réel (cela se généralise ensuite à d'autres corps, dits *corps de scalaires*).

## Familles libres et familles génératrices

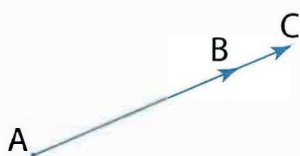
La multiplication externe permet en particulier de définir une « *combinaison linéaire* » de vecteurs. On dit qu'un vecteur  $\vec{W}$  est une *combinaison linéaire* d'une famille F (finie ou infinie) de vecteurs s'il existe  $n$  vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n$  de F et  $n$  scalaires (ce sont ici des réels)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  tels que  $\vec{W} = \lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 + \lambda_3 \vec{V}_3 + \dots + \lambda_n \vec{V}_n$ .

Pour obtenir une combinaison de vecteurs de F égale au vecteur nul, une solution évidente est que tous les coefficients  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$  soient nuls. S'il n'y a pas d'autre possibilité, on dit que la famille F est une *famille libre*.

Si tous les vecteurs de l'espace vectoriel E s'expriment comme des combinaisons linéaires de la famille F, on dit que F est une *famille génératrice* de E.

Une famille à la fois libre et génératrice de E est appelée une *base*. Si elle contient un nombre  $n$  fini de vecteurs, on dit que l'espace vectoriel est de *dimension finie n*. C'est évidemment le cas de l'espace vectoriel associé à un plan (de dimension 2) ou à l'espace dans lequel nous nous mouvons, qui est de dimension 3.

Pour multiplier un vecteur  $V$  par un réel  $\lambda$  (on notera le résultat  $\lambda V$ ), on va s'intéresser à la translation obtenue en composant, dans cet ordre, la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\lambda$ .



Le point  $C$  est le transformé de  $B$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\lambda$  (sur cet exemple  $\lambda = 5/4$ ).

Cette composition transforme  $B$  en un point  $C$ . Par définition, on dira que :  
 $\lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .

On remarque que  $1V = V$  et que  $0V = 0$  (vecteur nul).

On montre assez facilement aussi, en utilisant la géométrie, les propriétés de *distributivité* de cette opération (voir le détail en encadré).

Les dés sont jetés ! Il ne reste plus qu'à faire comme si on avait oublié l'origine géométrique de ces notions et de leurs démonstrations, et de tout réinventer. Comment ? En proclamant l'axiomatique des espaces vectoriels (voir encadré ci-contre), puis en redéfinissant la géométrie dite *affine* à partir des espaces vectoriels !

G.C.

## Définition axiomatique des espaces vectoriels



Giuseppe Peano  
 (1858–1932)  
 fut le premier à définir les espaces vectoriels de manière axiomatique.

On appelle *espace vectoriel* sur un corps  $K$  (appelé *corps des scalaires*) un ensemble  $E$  dans lequel existent :

- une *addition interne*, entre éléments de  $E$ , ayant les propriétés d'un groupe abélien ;
- une *multiplication externe* de  $K \times E$  dans  $E$  qui, à tout couple  $(\lambda, V)$ , associe le vecteur  $\lambda V$  ayant les propriétés de distributivité suivantes : pour tous scalaires  $\lambda$  et  $\mu$ , ainsi que pour tous vecteurs  $V$  et  $W$ ,

$$-(\lambda\mu)V = \lambda(\mu V) ;$$

$$-(\lambda + \mu)V = (\lambda V) + (\mu V) ;$$

$$-\lambda(V + W) = (\lambda V) + (\mu W).$$

On peut alors, à partir d'un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $K$  ( $\mathbb{R}$  pour les espaces réels), (re) définir un *espace affine*  $(A)$  associé à l'espace vectoriel : c'est un ensemble de points tel qu'on puisse associer un vecteur de  $E$  à tout couple de points de  $(A)$  :  $(O, M) \mapsto \overrightarrow{OM}$ , cette application étant une bijection quand  $O$  est fixé et vérifiant la relation de Chasles !