

MATHEMATIQUES N°5

Remarques : un peu de ceci, un peu de cela... Chacun devrait y trouver son compte !

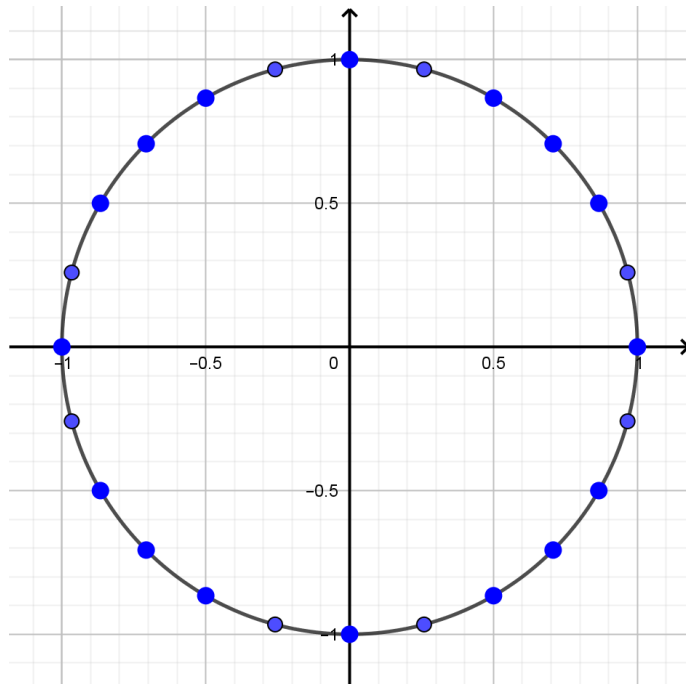
Exercice 1 : (3,5 points)

- 1° a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{2n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 b. Cette suite semble-t-elle convergente ? Si oui, conjecture sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 2° Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 50$ et $v_{n+1} = -0,9v_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite semble-t-elle convergente ? Si oui, conjecture sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2 : (4,5 points)

- 1° Sur le cercle ci-dessous, placer les points correspondant aux angles :

$$A : \frac{7\pi}{4} \quad B : \frac{-7\pi}{2} \quad C : \frac{7\pi}{3} \quad D : \frac{-7\pi}{6} \quad E : \frac{7\pi}{6} \quad F : -143\pi$$



- 2° a. Déterminer la mesure principale de $\frac{479\pi}{3}$
 b. Déterminer la mesure principale de $\frac{-347\pi}{4}$

$$3^\circ \text{ Convertir en degrés : } A = \frac{7\pi}{12} \text{ rad} \quad B = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

$$4^\circ \text{ Convertir en radians et donner la réponse sous forme de fractions simplifiées : } C = 120^\circ \quad D = 225^\circ$$

Exercice 3 : (4,5 points)

Une usine fabrique et vend des sacs. Le prix de vente d'un sac est de 38 € et le coût de fabrication de x sacs est donné par :

$$C(x) = 0,02x^3 - 2,1x^2 + 74x + 80$$

- 1° Vérifier que le bénéfice réalisé pour la vente de x sacs est :

$$B(x) = -0,02x^3 + 2,1x^2 - 36x - 80$$

- 2° a. Déterminer le nombre de sacs que doit fabriquer et vendre cette usine pour réaliser un bénéfice maximal. (cela ne se fait pas en deux lignes !)
 b. Quel est le bénéfice maximal que l'usine peut réaliser ?

Exercice 4 : (7,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

- 1° Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
 2° Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
 3° Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 - (8x - 12)$
 a. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$
 b. Démontrer que g est positive sur $[0 ; +\infty[$
 c. Dédire des questions précédentes la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ sur $[0 ; +\infty[$

Bonus : a. Quel est le sens latin originel du mot « vecteur » ?

- b. Dans l'article, comment appelle-t-on un couple de points de l'espace ?
 c. Dans l'article, on parle de « relation d'équipollence » : en fait, c'est ce qu'on appelle plus communément une relation d'...
 d. Dans l'article, au lieu de parler de « somme » de deux vecteurs, on parle de ... de deux vecteurs. (ça commence par un « c »)
 e. Quelle transformation géométrique commençant par la lettre « h » permet de définir la multiplication d'un vecteur par un coefficient ?

MATHEMATIQUES N°5

Exercice 4 : (3,5 points)

$$1^{\circ} a. u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2n-1}$$

$$= \frac{1}{2n+2-1} - \frac{1}{2n-1}$$

$$= \frac{2n+1}{2n-1} - \frac{2n-1}{2n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n-1)}{2n-1-2n-1}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n-1)}{-2}$$

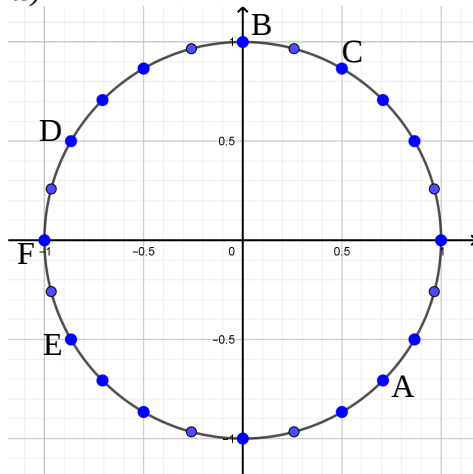
$$= \frac{(2n+1)(2n-1)}{-2} < 0 \text{ car } n \geq 1$$

Donc (u_n) est décroissante.

b. Cette suite semble convergente, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2° Cette suite semble convergente, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \approx 0,5263157895$ (c-a-d $\frac{10}{19}$)

Exercice 1 : (4,5 points)



2° a. $479 = 80 \times 6 - 1$

$$\frac{479\pi}{3} = 80 \times 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

La mesure principale de $\frac{479\pi}{3}$ est $\frac{-\pi}{3}$

b. $-347 = -43 \times 8 - 3$

$$\frac{-347\pi}{4} = -43 \times 2\pi - \frac{3\pi}{4}$$

La mesure principale de $\frac{-347\pi}{4}$ est $\frac{-3\pi}{4}$

$$3^{\circ} A = \frac{7\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = 105^{\circ}$$

$$B = \frac{5\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 300^{\circ}$$

$$4^{\circ} C = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$D = 225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

Exercice 3 : (4,5 points)

1° Le bénéfice est :

$$B(x) = 38x - C(x)$$

$$= 38x - (0,02x^3 - 2,1x^2 + 74x + 80)$$

$$= 38x - 0,02x^3 + 2,1x^2 - 74x - 80$$

$$= -0,02x^3 + 2,1x^2 - 36x - 80$$

2° a. Déterminons les variations de B :

$$B'(x) = -0,02 \times 3x^2 + 2,1 \times 2x - 36$$

$$= -0,06x^2 + 4,2x - 36$$

$$\Delta = 17,64 - 4 \times (-0,06) \times (-36) = 17,64 - 8,64 = 9$$

$$x_1 = \frac{-4,2 - 3}{2 \times (-0,06)} = \frac{-7,2}{-0,12} = 60$$

$$x_2 = \frac{-4,2 + 3}{2 \times (-0,06)} = \frac{-1,2}{-0,12} = 10$$

x	0	10	60	+
$g'(x)$	-	+	-	
$g(x)$				

L'entreprise doit vendre 60 sacs pour réaliser un bénéfice maximal.

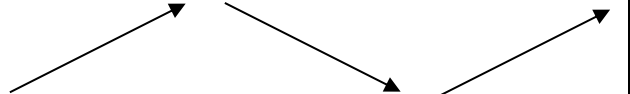
b. Le bénéfice est alors $B(60) = 1\,000 \text{ €}$

Exercice 4 : (7,5 points)

1° $f'(x) = 3x^2 - 2x$

$$= x(3x - 2)$$

Donc $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{2}{3}$ (et sinon, delta, les racines...)

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$
$f(x)$				

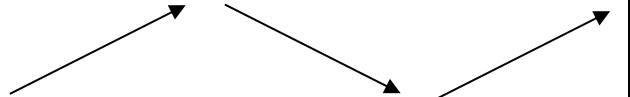
(2,5)

$$\begin{aligned}
 2^\circ \mathcal{T} : y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\
 &= (3 \times 2^2 - 2 \times 2)(x-2) + 2^3 - 2^2 \\
 &= (12-4)(x-2) + 8-4 \\
 &= 8(x-2) + 4 \\
 &= 8x - 16 + 4 \\
 &= 8x - 12
 \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 3^\circ \text{ a. } g'(x) &= 3x^2 - 2x - 8 \\
 \Delta &= 4 - 4 \times 3 \times (-8) \\
 &= 4 + 96 \\
 &= 100
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où : } x_1 &= \frac{2-10}{2 \times 3} & \text{et} & & x_2 &= \frac{2+10}{2 \times 3} \\
 &= \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} & & & &= \frac{12}{6} = 2
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{-4}{3}$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$-$	$+$
$g(x)$				

(2,5)

b. Le minimum de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ est :

$$\begin{aligned}
 g(2) &= 8 - 4 - 16 + 12 = 0 \\
 \text{Donc } g(x) &\geq 0 \text{ sur } [0 ; +\infty[
 \end{aligned}$$

(0,75)

$$\begin{aligned}
 \text{c. } g(x) &= x^3 - x^2 - 8x + 12 \\
 &= f(x) - y
 \end{aligned}$$

Or, on vient de voir que $g(x) \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$

(0,75)

$\mathcal{C}$ est donc au-dessus de $\mathcal{T}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Bonus : a. Conducteur (ou passager) d'un bateau ou d'un chariot / transport

b. Un bipoint c. Equivalence d. Composée / composition e. Homothétie

(+0,25)

(+0,25)

(+0,25)

(+0,25)