

MATHEMATIQUES N°4

Remarques : rien d'exceptionnel mais plusieurs notions à maîtriser pour réussir. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : (2 points)

L'incontournable : déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{7e^{3-5x}}$

Exercice 2 : (3 points) Extrait d'un sujet de BAC : c'est mon cadeau de Noël...

Les réponses seront données à 10^{-4} près si besoin.

Dans la revue Lancet Public Health, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

- On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note I l'évènement : « L'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 ».
Quelle est la probabilité que cet adulte ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
- On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
 - Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
 - Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
 - Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
 - Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
 - A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $p(X \leq n) \geq 0,9$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 : (1,5 points)

Un élève triche à tous les contrôles de maths. On considère que la probabilité qu'il se fasse prendre est de 60%.

Soit n le nombre de contrôles de maths qu'il passe. A partir de combien de contrôles la probabilité qu'il se fasse prendre au moins une fois sera-t-elle supérieure à 99% ?

On introduira une variable aléatoire X bien choisie et on soignera la rédaction.

Conclure en remettant les choses dans leur contexte.

Exercice 4 : (1,5 points)

Lors d'une heure de cours de maths, un élève s'endort avec une probabilité de 8%. Durant l'année scolaire, cet élève va avoir 216 heures de cours de maths.

On note X le nombre de cours de maths durant lesquels il s'endort.

Déterminer a tel que $p(X \leq a) \leq 0,05$ et b tel que $p(X \leq b) \geq 0,95$.

Interpréter l'intervalle $[a ; b]$ ainsi obtenu.

Exercice 5 : (1,5 points) Intervalle à 95%

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3xe^{2x}$.

Déterminer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 6 : (2,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - 5x)^3 e^{2x+1}$

- Vérifier que $f'(x) = (1 - 5x)^2 e^{2x+1} (-13 - 10x)$
- Déterminer les variations de f .
- Combien de tangentes horizontales $\mathcal{C}_f$ présente-t-elle ? Justifier.

Exercice 7 : (8 points)

f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{6x+3}{2-x}}$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
 - Sur quel ensemble cette fonction est-elle dérivable ?
- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Interpréter graphiquement s'il y a quelque chose à dire...
- Vérifier que $f'(x) = \frac{15}{2(2-x)^2} \sqrt{\frac{2-x}{6x+3}}$
 - En déduire les variations de la fonction f .
- Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
- On admet que $\lim_{\substack{x \rightarrow -0,5 \\ x > -0,5}} f'(x) = +\infty$.
Comment peut-on l'interpréter graphiquement pour $\mathcal{C}_f$?
- Compléter le graphique au verso de ce sujet avec $\mathcal{C}_f$.

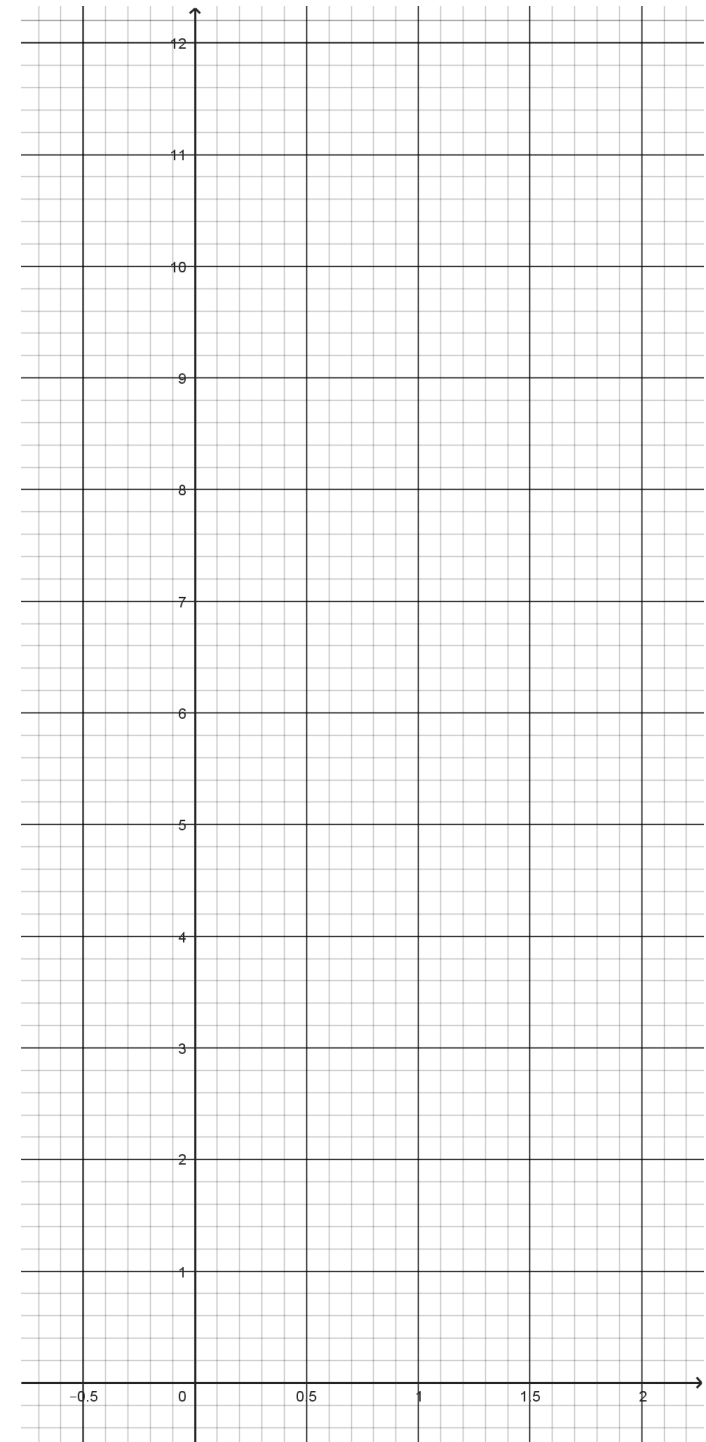
Bonus : (+1,5 points)

1. Comment appelle-t-on la statistique permettant d'extrapoler les résultats observés sur un échantillon d'individus à un groupe plus large ?
2. L'incertitude liée aux estimations d'un sondage est donnée par l'intervalle

$$\left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

On dit que c'est un intervalle ...

3. Combien de personnes faut-il interroger lors d'un sondage pour avoir des résultats à $\pm 3\%$?
4. Au rugby par exemple, quelle utilité a-t-on trouvée pour les statistiques selon l'article ?
5. Dans le cas particulier de la banque, de la finance et de l'assurance, la statistique côtoie...
6. La statistique est également un atout pour le secteur industriel : peux-tu donner deux des trois exemples cités dans l'article pour ce domaine ?



MATHEMATIQUES N°4

Exercice 1 : (2 points)

$$\begin{aligned} \frac{2x}{e^{3-5x}} &= \frac{2}{7} \times \frac{x}{e^{3-5x}} \\ &= \frac{2}{7e^3} \times \frac{1}{-5} \times \frac{-5x}{e^{-5x}} \\ &= \frac{-2}{35e^3} \times \frac{X}{e^X} \text{ en posant } X = -5x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{7e^{3-5x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{35e^3} \times \frac{X}{e^X} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3 points) Extrait d'un sujet de BAC : cadeau de Noël...

- D'après l'énoncé, $p(I) = 0,057$
- a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0,057)$ car le tirage est assimilé à un tirage avec remise (identique) et les personnes choisies de façon indépendante.
b. $E(X) = 100 \times 0,057 = 5,7$
Dans cet échantillon de 100 personnes, on trouve en moyenne 5,7 adultes ayant déjà été infectés par la COVID 19.
- $p(X = 0) = \binom{100}{0} 0,057^0 \times 0,943^{100} = 0,943^{100} \approx 0,0028$
- $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) \approx 0,9801$
- On obtient $n = 9$.
Dans un groupe de 100 adultes, la probabilité que le nombre de personnes ayant déjà été infectées soit inférieur à 9 dépasse 90%.

Exercice 3 : (1,5 points)

Notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de contrôles de maths durant lesquels l'élève s'est fait prendre.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 0,6)$$

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times 0,6^0 \times 0,4^n \\ &= 1 - 0,4^n \geq 0,99 \end{aligned}$$

D'après la calculatrice, c'est à partir de $n = 6$ que $p(X \geq 1) \geq 0,99$.

Autrement dit, c'est à partir du 6ème contrôle de maths que la probabilité de tricher en se faisant prendre au moins une fois dépassera 99%.

Exercice 4 : (1,5 points)

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(216; 0,08)$$

On obtient $a = 10$ et $b = 24$.

Autrement dit, durant l'année, on peut s'attendre à ce que cet élève s'endorme entre 10 et 24 fois en cours de maths, avec une fiabilité de 90%.

Exercice 5 : (1,5 points)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ par produit.}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3xe^{2x} \\ &= \frac{3}{2} \times 2xe^{2x} \\ &= \frac{3}{2} X e^X \text{ en posant } X = 2x \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2} X e^X = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Exercice 6 : (2,5 points)

$$\begin{aligned} 1. u &= (1 - 5x)^3 & v &= e^{2x+1} \\ u' &= 3(1 - 5x)^2 \times (-5) & v' &= e^{2x+1} \times 2 \\ &= -15(1 - 5x)^2 & &= 2e^{2x+1} \\ f'(x) &= -15(1 - 5x)^2 e^{2x+1} + 2e^{2x+1} (1 - 5x)^3 \\ &= (1 - 5x)^2 e^{2x+1} (-15 + 2(1 - 5x)) \\ &= (1 - 5x)^2 e^{2x+1} (-15 + 2 - 10x) \\ &= (1 - 5x)^2 e^{2x+1} (-13 - 10x) \end{aligned}$$

2. $f'(x)$ a le même signe que $-13 - 10x$.

$-13 - 10x = 0$	x	$-\infty$	$-1,3$	$+\infty$
$-13 = 10x$	$f'(x)$	+		
$\frac{-13}{10} = x$	$f(x)$	-		

3. La tangente en $-1,3$, easy : impossible de la manquer.

Mais il ne faut pas oublier le facteur $(1 - 5x)^2$ présent dans la dérivée : lui aussi peut s'annuler.

$$\begin{aligned} 1 - 5x &= 0 \\ 1 &= 5x \\ x &= \frac{1}{5} = 0,2 \end{aligned}$$

Il y a donc une seconde tangente horizontale, lorsque $x = 0,2$.

Exercice 7 : (8 points)

1° a. Il faut que $\frac{6x+3}{2-x} \geq 0$:

$$\begin{array}{lcl} 6x+3=0 & & 2-x=0 \\ 6x=-3 & & 2=x \\ x=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2} & & \end{array}$$

x	$-\infty$	$-1/2$	2	$+\infty$
$6x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$-$	$-$
Quotient	$-$	$+$	$-$	$-$

L'ensemble de définition de f est donc $\left[\frac{-1}{2}; 2\right[$. (1,5)

b. f est dérivable sur $\left]\frac{-1}{2}; 2\right[$. (0,5)

2° a. On doit calculer la limite en 2 à gauche.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 2-x = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} 6x+3 = 15$$

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{6x+3}{2-x} = +\infty$ et donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$ (1)

On observe une asymptote verticale d'équation $x = 2$. (0,25)

$$\begin{aligned} 3^\circ \text{ a. } \left(\frac{6x+3}{2-x}\right)' &= \frac{6(2-x) - (-1)(6x+3)}{(2-x)^2} \\ &= \frac{12-6x+6x+3}{(2-x)^2} \\ &= \frac{15}{(2-x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f'(x) &= \frac{\frac{15}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{6x+3}{2-x}}} \\ &= \frac{15}{(2-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{6x+3}{2-x}}} \\ &= \frac{15}{2(2-x)^2} \sqrt{\frac{2-x}{6x+3}} \end{aligned} \quad (1,5)$$

b. Sans soucis, $f'(x) \geq 0$: la fonction f est donc croissante. (0,25)

$$4^\circ y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f'(1) = \frac{15}{2(2-1)^2} \sqrt{\frac{2-1}{6 \times 1 + 3}} = \frac{15}{2} \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{15}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$f(1) = \sqrt{\frac{6 \times 1 + 3}{2-1}} = \sqrt{\frac{9}{1}} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } y &= 2,5(x-1) + 3 \\ &= 2,5x - 2,5 + 3 \\ &= 2,5x + 0,5 \end{aligned} \quad (1)$$

5° Cela signifie qu'on a une (demi-)tangente verticale en $x = -0,5$. (0,5)

6° Voir page suivante

Bonus : (+1,5 points)

1. La statistique inférentielle (+0,25)

2. Intervalle « de confiance » (+0,25)

3. 1 000 (+0,25)

4. La prévention des blessures à partir de l'observation du nombre et de l'intensité des collisions. (+0,25)

5. L'actuariat (+0,25)

6. Vérifier les normes de qualité d'une production, quantité de sucre dans un biscuit, ressenti des consommateurs vis-à-vis d'une nouvelle crème (texture, odeur...) (+0,25)

