

La mesure du cercle

Al-Kashi dans les pas d'Archimède

Aujourd'hui la course aux décimales de π permet de calibrer les gros ordinateurs. Au xv^e siècle, al-Kashi déterminait les seize premières décimales du « nombre d'Archimède » avec un exceptionnel brio calculatoire.

Pour les anciens Grecs, la quadrature d'une surface du plan réside dans la possibilité d'une construction à la règle et au compas d'un carré de même aire que la surface considérée. On sait, depuis les travaux de Pierre-Laurent Wantzel (1837) et de Karl von Lindemann (1882) que la quadrature du cercle est impossible. Archimède de Syracuse (– 287, – 212) fut un quadrateur de génie. Sa détermination de l'aire d'un segment de parabole (« *Tout segment limité par une droite et par une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment de parabole.* ») est un étourdissant alliage de rigueur et d'imagination mathématiques.

« Une démonstration définitive a rejeté parmi les rêves l'antique ambition de la quadrature du cercle. Heureux les géomètres, qui résolvent de temps à autre telle nébuleuse de leur système ; mais les poètes le sont moins ; ils ne sont pas encore assurés de l'impossibilité de quarrer toute pensée dans une forme poétique. »

Paul Valéry



Archimède,
de Giuseppe Patania (1780–1852).

Dans son traité *La mesure du cercle*, Archimède ramène la quadrature du cercle à la rectification de sa circonférence (c'est-à-dire à trouver un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit coïncide avec le rayon du cercle et dont l'autre côté, la base, a pour longueur le périmètre du cercle). Archimède présageait-il en son temps que la quadrature du cercle était une chimère ?

On trouve, dans l'*Almageste* (écrit



La médresa de
Samarcande.

deux siècles plus tard), ce commentaire de Claude Ptolémée : « *J'aurais fait ce travail (la quadrature du cercle) si je n'avais pas compris, comme je l'ai souvent dit, qu'il est impossible de trouver au moyen des procédés décrits ici, un segment de droite exactement égal à la circonférence du cercle et que, pour qui cherche à s'approcher de près (de la valeur exacte) les indications données ici par Archimède suffisent.* »

Les « indications données par Archimède », évoquées par Ptolémée, sont les deuxième et troisième propositions de la *Mesure du cercle* :

Proposition II : *Le rapport de l'aire du cercle au carré de son diamètre est celui de 11 à 14.*

Autrement dit, $\pi/4 \approx 11/14$.

Proposition III : *Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzième parties du diamètre.*

Autrement dit, $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

Les palimpsestes se grattent, les rouleaux s'égarent, les bibliothèques brûlent, la mémoire de l'homme s'efface. La philosophie et la science antiques ont été préservées, perpétuées et magnifiées par la civilisation arabe qui, de Cordoue à Bagdad, a prospéré du VIII^e au XIV^e siècle.

Al-Kashi, dans les pas d'Archimède, poursuivit la quête sans fin aux décimales de π .

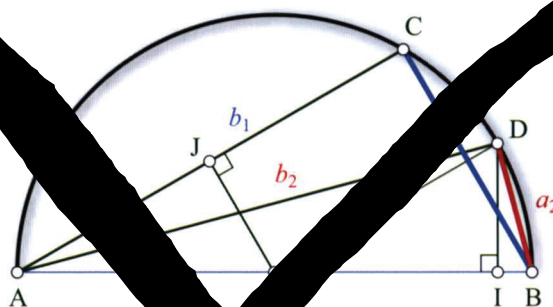
Un érudit vagabond

On ne sait pas quand il est né, ni quand il est mort. Les archives locales de Kashan, sa ville natale, signalent sa présence en 1410. Un an plus tard, il écrit son premier traité. Ghiyath ad-Din Jamshid

Masud al-Kashi est un astronome, fou de calcul. Ses *Khaqani Zij* (*Tables du grand Khan*), rédigées en 1414, reprennent, corrigent et complètent les *Ilkhani Zij*, grand classique de l'astronomie arabe, écrit deux siècles plus tôt par Nasir al-Din al-Tusi. Commencent alors les années de pérégrination sur les chemins de Perse. Vivant de peu, monnayant son savoir

en leçons particulières, exerçant épisodiquement la médecine, al-Kashi finit par croiser, à Samarcande, la route du « Prince astronome », le sultan Oulough Beg. Le temps de la précarité et de l'affliction est consommé. Al-Kashi, dans les lettres à son père, chante les louanges de son mécène (« Il connaît par cœur l'essentiel du glorieux Coran et récite chaque jours deux nouveaux chapitres en présence de zélateurs du Saint Livre et aucune erreur n'est commise. Il n'ignore rien de la grammaire arabe et sa calligraphie est sans défaut. Il maîtrise le Canon et ses connaissances sont grandes en logique, rhétorique et éloquence. Il connaît à la perfection les *Éléments* d'Euclide et cultive toutes les branches des mathématiques. Sa puissance en calcul mental est sans égale [...]. »)

Figure d'al-Kashi



et J désignent respectivement les pieds des perpendiculaires abaissées du sommet D du dodécaèdre sur (AB) et du centre O du cercle sur (AC). Les triangles ADB et AOI sont semblables, d'où $AB/b_2 = b_2/AI$. On peut encore s'écrire $AB \cdot AI = b_2^2$. Or, $AB \cdot AI = 2(1 + OI)$. (*) D'autre part, d'après le théorème de Pythagore, $AI^2 = 1 + OI^2$. C'est

égal à la moitié de l'angle BOC , ce qui entraîne que les deux angles BAC et AOI sont égaux et les triangles ADB et AOI semblables. En fait, ces deux triangles rectangles sont isométriques (leur hypoténuse est un rayon du cercle). Par conséquent, $2OI = b_2$. Il reste à reporter cette valeur dans (*) pour obtenir : $b_2^2 = 2 + b_1^2$.

Al-Kashi enseigne dès lors à la médresa de Samarcande au côté du célèbre astronome Qadi-zadeh Roumi, participe à la création de l'observatoire de Samarcande, et publie en 1427 son ouvrage majeur, le *Miftah al hisab* (La clé de l'arithmétique).

L'algorithme d'al-Kashi

C'est dans son *Traité sur la circonférence* de 1424 que al-Kashi calcule une valeur de π avec 16 décimales exactes. L'idée initiale est celle d'Archimède : approcher le cercle de rayon unité par un polygone régulier inscrit ayant un grand nombre de côtés.

Toute la difficulté réside dans le calcul de la longueur commune des côtés du polygone.

Al-Kashi commence par l'hexagone régulier inscrit car son périmètre est très facile à calculer. Ce polygone est en effet la réunion de six triangles équilatéraux.

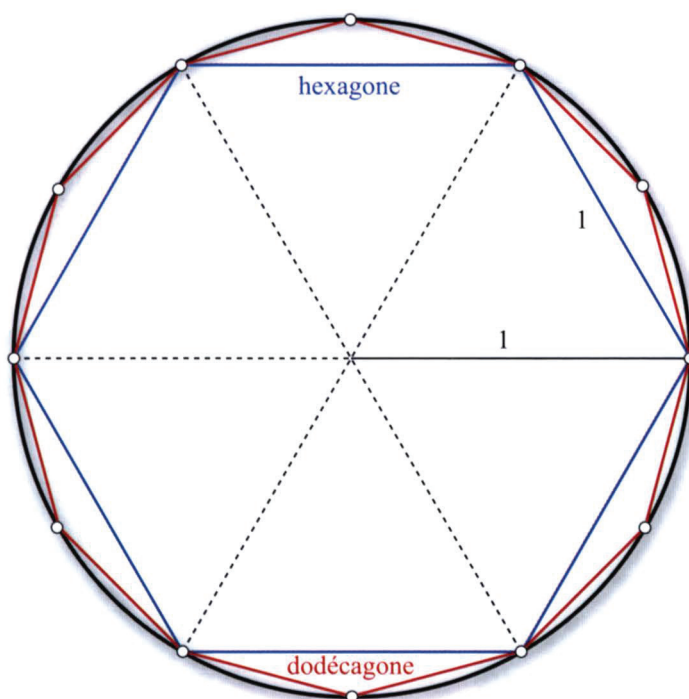
Bibliographie

De la mesure du cercle, Archimède, traduction de F. Peyrard.

Jamshid al-Kashi Calculating Genius, Glen van Brummelen, 1998.

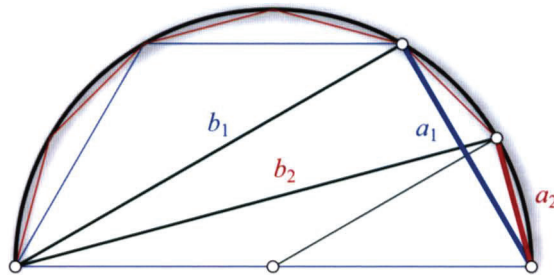
A letter of Jamshid al-Kashi to his father, E. S. Kennedy, *Orientalia* 29, 1960.

Un côté a donc pour longueur $a_1 = 1$ et la première approximation de π en découle : $\pi \approx 3$. (C'est la valeur biblique du nombre d'Archimède : « *Il fit la mer de fonte. Elle avait dix coudées d'un bord à l'autre, une forme entièrement ronde, cinq coudées de hauteur, et une circonférence que mesurait un cordon de trente coudées.* » Livre des rois 7 : 22–27).



L'étape suivante consiste à doubler le nombre de côtés et à déterminer la longueur d'un côté d'un dodécagone régulier.

Al-Kashi a alors la riche idée de tracer la figure suivante :



et d'y dénicher la remarquable relation :

$$b_2^2 = 2 + b_1.$$

Le diamètre du cercle qui vaut 2 est l'hypoténuse du triangle rectangle dont les deux autres côtés ont pour longueur b_1 et a_1 .

D'après le théorème de Pythagore,

$$b_1 = \sqrt{2^2 - a_1^2} = \sqrt{3} \approx 1,73205...$$

et par la formule d'al-Kashi :

$$b_2 = \sqrt{2 + b_1} \approx 1,93185...$$

Un nouvel appel à Pythagore fournit

$$a_2 = \sqrt{2^2 - b_2^2} \approx 0,51763...$$

En multipliant par 6, on obtient le résultat

$$\pi \approx 3,10582...$$

Al-Kashi ne renonce pas malgré la médiocrité de l'approximation. Arrivé à ce stade, il fait la simple mais géniale remarque que sa formule n'est pas propre à l'hexagone et au dodécagone ; elle reste vraie pour tout polygone régulier dont on double les côtés.

La considération des deux suites

$$b_n^2 = 2 + b_{n-1} \text{ et } a_n = \sqrt{4 - b_n^2}$$

permet donc d'obtenir de proche en proche une suite de valeurs capturant de mieux en mieux la valeur de π .

Pour $n = 96$, il retrouve la valeur d'Archimède $\pi = 3,14103...$ Mais il va plus loin. Son propos est de déterminer « le diamètre de l'univers en ne se trompant pas plus que l'épaisseur d'un crin de cheval », ce qui d'après ses estimations nécessite de connaître π avec 16 décimales exactes.

Il calcule, calcule, calcule.

Et trouve $\pi = 3,1415926535897932...$

Le polygone associé a 805 306 368 côtés !

F. C.

Timbre à l'effigie d'al-Kashi, émis en 1979.

