

MATHÉMATIQUES N°4

Remarques : La qualité de la rédaction et du soin seront pris en compte.

Exercice 1 : (2,5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

A l'aide de la définition du nombre dérivé, démontrer (comme cela a été fait en cours...) que $f'(a) = 2a$.

Exercice 2 : (3,5 points)

On veillera à bien détailler les calculs dans cet exercice...

- On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n-1}{3-4n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer son troisième terme.
- On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 3$ et $v_{n+1} = \frac{2v_n-1}{3-4v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer son troisième terme.
- On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 3$ et la relation de récurrence $w_{n+1} = \frac{7w_n}{n+1}$. Calculer w_1, w_2 et w_3 .

Exercice 3 : (6,5 points)

1° Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = (3-5x)(9x-1) \quad f_2(x) = \frac{2x}{5} + \frac{8}{5x}$$

$$f_3(x) = \sqrt{4-2x} \quad f_4(x) = x\sqrt{2} - \pi$$

2° Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $u(x) = 5x^2 - 3x + 1$ au point d'abscisse 2 ?

Exercice 4 : (7,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x+4}{2-x}$

- Calculer $f'(x)$.
- a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{8}{2-x} - 2$
b. Calculer $f'(x)$ en utilisant cette expression et vérifier la cohérence avec la réponse obtenue à la question 1.
- Vérifier que la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse 3 a pour équation réduite $y = 8x - 34$

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) - (8x - 34) = \frac{8(x-3)^2}{2-x}$
- En déduire la position relative de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Bonus : (+1,5 points)

- Quel mathématicien a œuvré pour le calcul des décimales de Pi au XV^e siècle ?
- En approchant le cercle de rayon 1 par un hexagone, quelle première valeur approchée de Pi obtient-on ?
- Sur quel théorème sont basés les calculs ?
- Combien de décimales exactes ce mathématicien souhaitait-il obtenir ?
- Pour y parvenir, il lui a fallu un polygone d'approximativement combien de côtés ?
- On sait que la quadrature du cercle est impossible : qu'est-ce que cela signifie ?



MATHEMATIQUES N°4

Exercice 1 : (2,5 points)

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= 2a + h\end{aligned}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a + h$$

D'où $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$ (2,5)

Exercice 2 : (3,5 points)

1. Le troisième terme est $u_2 = \frac{2 \times 2 - 1}{3 - 4 \times 2} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$ (0,75)

2. Le troisième terme est v_3 .

$$v_2 = \frac{2 \times 3 - 1}{3 - 4 \times 3} = \frac{5}{-9} = -\frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned}v_3 &= \frac{2 \times \frac{-5}{9} - 1}{3 - 4 \times \frac{-5}{9}} \\ &= \frac{\frac{-10}{9} - \frac{9}{9}}{\frac{27}{9} + \frac{20}{9}} \\ &= \frac{\frac{-19}{9}}{\frac{47}{9}} = \frac{-19}{47} \times \frac{9}{47} \\ &= \frac{-19}{47} \quad (1,25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. w_1 &= \frac{7u_0}{0+1} \\ &= \frac{7 \times 3}{1} \\ &= 21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_2 &= \frac{7u_1}{1+1} \\ &= \frac{7 \times 21}{2} \\ &= 73,5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_3 &= \frac{7u_2}{2+1} \\ &= \frac{7 \times (-\frac{3}{5})}{3} \\ &= -\frac{7}{5} = -1,4 \quad (1,5)\end{aligned}$$

Exercice 3 : (6,5 points)

$$\begin{aligned}f_1'(x) &= -5(9x - 1) + 9(3 - 5x) \\ &= -45x + 5 + 27 - 45x \\ &= -90x + 32 \quad (1,5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_3'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{4-2x}} \times (-2) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{4-2x}} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2'(x) &= \frac{2}{5} + \frac{8}{5} \times \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{-8}{5x^2} \quad (1,5) \\ &= \frac{2x^2 - 8}{5x^2} = \frac{2(x^2 - 4)}{5x^2} \\ &= \frac{2(x-2)(x+2)}{5x^2} \quad (+0,5)\end{aligned}$$

$$f_4'(x) = \sqrt{2} \quad (0,5)$$

$$\begin{aligned}2^\circ u'(x) &= 5 \times 2x - 3 \\ &= 10x - 3\end{aligned}$$

Donc $u'(2) = 10 \times 2 - 3 = 20 - 3 = 17$

Et $u(2) = 5 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 20 - 6 + 1 = 15$

L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction u au point d'abscisse 2 est :

$$\begin{aligned}y &= 17(x - 2) + 15 \\ &= 17x - 34 + 15 \\ &= 17x - 19 \quad (2)\end{aligned}$$

Exercice 4 : (7,5 points)

$$\begin{aligned}1. f'(x) &= \frac{2(2-x) - (-1)(2x+4)}{(2-x)^2} \\ &= \frac{4 - 2x + 2x + 4}{(2-x)^2} \\ &= \frac{8}{(2-x)^2} \quad (1,5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. a. \frac{8}{2-x} - 2 &= \frac{8 - 2(2-x)}{2-x} \\ &= \frac{8 - 4 + 2x}{2-x} \\ &= \frac{4 + 2x}{2-x} = f(x) \quad (1)\end{aligned}$$

$$b. f'(x) = 8 \times \frac{-(-1)}{(2-x)^2} = \frac{8}{(2-x)^2}$$

Ce résultat est bien cohérent avec celui de la question 1. (1)

3. $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$

$$\text{Or, } f'(3) = \frac{8}{(2-3)^2} = \frac{8}{(-1)^2} = \frac{8}{1} = 8 \quad \text{et} \quad f(3) = \frac{2 \times 3 + 4}{2-3} = \frac{10}{-1} = -10$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } y &= 8(x-3) - 10 \\ &= 8x - 24 - 10 \\ &= 8x - 34 \end{aligned} \quad (1,5)$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ a. } f(x) - (8x - 34) &= \frac{2x+4}{2-x} - (8x-34) \\ &= \frac{2x+4 - (8x-34)(2-x)}{2-x} \\ &= \frac{2x+4 - (16x - 8x^2 - 68 + 34x)}{2-x} \\ &= \frac{2x+4 - 16x + 8x^2 + 68 - 34x}{2-x} \\ &= \frac{8x^2 - 48x + 72}{2-x} \\ &= \frac{8(x^2 - 6x + 9)}{2-x} \\ &= \frac{8(x-3)^2}{2-x} \end{aligned} \quad (1,5)$$

b. $f(x) - (8x - 34)$ a le même signe que $2 - x$ car $8(x-3)^2 > 0$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - (8x - 34)$	+		-

Ainsi, si $x < 2$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{T}$ et si $x > 2$, $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{T}$. (1)

Bonus : (+1,5 points)

1. Al-Kashi
2. $\pi \approx 3$
3. Le théorème de Pythagore. (+0,25)
4. 16
5. 805 306 368 côtés. *J'accepte toute valeur entre 600 millions et 1 milliard* 😊
6. Construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un disque donné est impossible.