

MATHEMATIQUES N°3

Remarques : 3ème et dernier contrôle du trimestre a priori... Et je crois avoir réussi à tout mettre, à ne rien oublier (ou presque) : tout le monde y trouvera donc son bonheur à un moment donné ! Enjoy.

Exercice 1 : (4,5 points) Extrait d'un sujet de BAC 2024

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les ~~cinq~~ trois questions de cet exercice sont indépendantes.

- On considère une suite (t_n) vérifiant $t_{n+1} = -0,8t_n + 18, \forall n \in \mathbb{N}$.
Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.
- On considère une suite (S_n) qui vérifie $3n - 4 \leq S_n \leq 3n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{S_n}{n}$.
Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.
- Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 2$ et pour tout $n \geq 1, v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}$.
Affirmation 3 : $\forall n \geq 1, v_n = \frac{n+1}{n}$

Exercice 2 : (6,5 points)

Calculer les limites suivantes et préciser si elles caractérisent des asymptotes :

- | | |
|--|--|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4}$ | b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4}$ |
| c. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{4x - 3}{x^2}$ | d. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{(x+1)(x+2)}{4x^2 + 5x - 6}$ |

Exercice 3 : (2 points)

Déterminer les limites des suites ci-dessous :

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a. $u_n = \frac{(-4)^n}{7^{n+2}}$ | b. $v_n = \frac{9^n + 2}{3^n - 4^n}$ |
|-----------------------------------|--------------------------------------|

Exercice 4 : (4,5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1,8$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$. Il ne faut donc pas le prouver !

- Démontrer par récurrence que $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .
- Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 5 : (2,5 points)

On définit la suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que $n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n+2)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Déterminer alors la limite de la suite (u_n) .

Bonus : (+1,5 points)

- Compléter la phrase suivante dans laquelle il manque un seul mot : « La récurrence pourrait être qualifiée de ... à l'infini. »
- Qu'est-ce que le raisonnement par induction ?
- Quel exemple classique de raisonnement par récurrence est détaillé dans l'article ?
- La « preuve » par l'exemple a-t-elle un intérêt ?
- Sur la dernière page de l'article, il y a un timbre à l'effigie de Pascal : de quelle provenance est-il ? 😊
- Donner la formule de la variance d'une variable aléatoire X .

MATHEMATIQUES N°3

Exercice 1 : (4,5 points)

1. L'affirmation est vraie.

$$\begin{aligned}w_n &= t_{n+1} - 10 \\&= -0,8t_n + 18 - 10 \\&= -0,8(w_n + 10) + 8 \\&= -0,8w_n - 8 + 8 \\&= -0,8w_n\end{aligned}$$

Donc (w_n) est géométrique de raison $-0,8$. (1,5)

2. L'affirmation est vraie.

$$\begin{aligned}3n - 4 &\leq S_n \leq 3n + 4 \\ \frac{3n - 4}{n} &\leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{3n + 4}{n} \quad \text{car } n > 0 \\ 3 - \frac{4}{n} &\leq \frac{S_n}{n} \leq 3 + \frac{4}{n}\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{4}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{4}{n} = 3.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$. Bref : (u_n) converge. (1,5)

3. L'affirmation est vraie.

Initialisation : $n = 1$

$$v_1 = 2 \quad \text{et} \quad \frac{1+1}{1} = 2 \quad \text{donc la propriété est vérifiée.}$$

Hérédité : supposons que $v_n = \frac{n+1}{n}$ pour un certain rang $n \geq 1$.

Montrons que $v_n = \frac{n+2}{n+1}$.

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= 2 - \frac{1}{v_n} \\&= 2 - \frac{1}{\frac{n}{n+1}} \quad \text{par HR} \\&= 2 - \frac{n}{n+1} \\&= \frac{2(n+1) - n}{n+1} \\&= \frac{n+2}{n+1}\end{aligned}$$

Par récurrence, $v_n = \frac{n+2}{n+1}, \forall n \geq 1$. (1,5)

Exercice 2 : (6,5 points)

$$\begin{aligned}\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \quad (0,5) \\&\Rightarrow \text{Asymptote horizontale } y = 2 \quad (0,25)\end{aligned}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - 5x + 1 = 2 \times 4 - 5 \times 2 + 1 = -1$$

$$\text{De plus, } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x^2 - 4 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x^2 - 4 = 0^-$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4} &= -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4} = +\infty \quad (2) \\&\Rightarrow \text{Asymptote verticale } x = 2 \quad (0,25)\end{aligned}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} 4x - 3 = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 = 0^+$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3}{x^2} &= -\infty \quad (0,75) \\&\Rightarrow \text{Asymptote verticale } x = 0 \quad (0,25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d. } \Delta &= 5^2 - 4 \times 4 \times (-6) \\&= 25 + 96 \\&= 121\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-5 - \sqrt{121}}{2 \times 4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{121}}{2 \times 4} \\&= \frac{-5 - 11}{8} \quad \quad \quad = \frac{-5 + 11}{8} \\&= \frac{-16}{8} = -2 \quad \quad \quad = \frac{6}{8} = 0,75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } 4x^2 + 5x - 6 &= 4 \left(x - \frac{3}{4} \right) (x - (-2)) \\&= (4x - 3)(x + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } \frac{(x+1)(x+2)}{4x^2 + 5x - 6} &= \frac{(x+1)(x+2)}{(4x-3)(x+2)} \\&= \frac{x+1}{4x-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{(x+1)(x+2)}{4x^2 + 5x - 6} &= \frac{-2+1}{4 \times (-2) - 3} \\&= \frac{-1}{-11} = \frac{1}{11} \quad (2,5)\end{aligned}$$

Il n'y a donc pas d'asymptote ici (fausse valeur interdite)

Exercice 3 : (2 points)

$$\begin{aligned} \text{a. } u_n &= \frac{(-4)^n}{7^{n+2}} \\ &= \frac{(-4)^n}{7^n \times 7^2} \\ &= \left(\frac{-4}{7}\right)^n \times \frac{1}{7^2} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (0,75)

$$\begin{aligned} \text{b. } v_n &= \frac{9^n + 2}{3^n - 4^n} \\ &= \frac{9^n \left(1 + \frac{2}{9^n}\right)}{4^n \left(\frac{3^n}{4^n} - 1\right)} \\ &= \left(\frac{9}{4}\right)^n \times \frac{1 + \frac{2}{9^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1} \\ \text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{9^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1} &= \frac{1 + 0}{0 - 1} = -1 \text{ et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^n &= +\infty \\ \text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= -\infty \quad (1,25) \end{aligned}$$

Exercice 4 : (4,5 points)

1° Initialisation : $n = 0$

$$u_1 = \frac{2}{3 - 1,8} \approx 1,67 < 1,8 \text{ donc propriété est donc vérifiée}$$

Hérédité : supposons que $u_{n+1} < u_n$ pour un certain rang n .

Montrons que $u_{n+2} < u_{n+1}$

On a $u_{n+1} < u_n$ par HR

$$3 - u_{n+1} > 3 - u_n$$

$$\frac{1}{3 - u_{n+1}} < \frac{1}{3 - u_n} \text{ car } 3 - u_n > 0 \text{ puisque } u_n < 2 \quad (0,5)$$

$$\frac{2}{3 - u_{n+1}} < \frac{2}{3 - u_n}$$

$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

Par récurrence, on peut donc affirmer que $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1,5)

2° D'après la question 2°, la suite (u_n) est décroissante.

De plus, (u_n) est minorée par 1 donc (u_n) converge vers ℓ . (0,75)

$$3^\circ \text{ On a alors } \ell = \frac{2}{3 - \ell} \text{ et donc } \ell(3 - \ell) = 2$$

$$3\ell - \ell^2 - 2 = 0$$

$$\ell^2 - 3\ell + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= 9 - 8 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\ell_1 = \frac{3 - 1}{2 \times 1} = 1 \text{ et } \ell_2 = \frac{3 + 1}{2 \times 1} = 2$$

Or, (u_n) est décroissante et $u_0 = 1,8$: elle ne peut donc pas tendre vers 2.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. (1,75)

Exercice 5 : (2,5 points)

1. On sait que $0 \leq 4$ donc $n^2 \leq n^2 + 4$ (0,25)

Par ailleurs, $(n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4$

$$\text{Or, } 0 \leq 4n \text{ donc } n^2 + 4 \leq n^2 + 4 + 4n$$

$$n^2 + 4 \leq (n + 2)^2 \quad (0,5)$$

2. On a $n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n + 2)^2$.

$\sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2 + 4} \leq \sqrt{(n + 2)^2}$ car la fonction racine est croissante

$$n \leq \sqrt{n^2 + 4} \leq n + 2$$

$$\frac{1}{n} \times n \leq \frac{1}{n} \times \sqrt{n^2 + 4} \leq \frac{1}{n} \times (n + 2)$$

$$1 \leq u_n \leq \frac{n + 2}{n}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, on peut donc dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ (1,75)

Bonus : (+1,5 points)

1. Montée (+0,25)

2. C'est formuler une loi générale à partir de la collecte d'observations (c'est-à-dire aller du particulier au général) (+0,25)

3. La somme des entiers de 1 à n . (+0,25)

4. Elle permet de découvrir de nouveaux résultats potentiels, que seul un raisonnement par récurrence pourra prouver. (+0,25)

5. Monaco (+0,25)

$$6. V(X) = \sum_{k=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \quad (+0,25)$$