

Mathématiser le hasard

Peut-on étudier le hasard de façon rationnelle ? Si tout le monde a un jour entendu parler de probabilités, de moyenne et de statistiques, il n'en reste pas moins que la question a un aspect paradoxal.



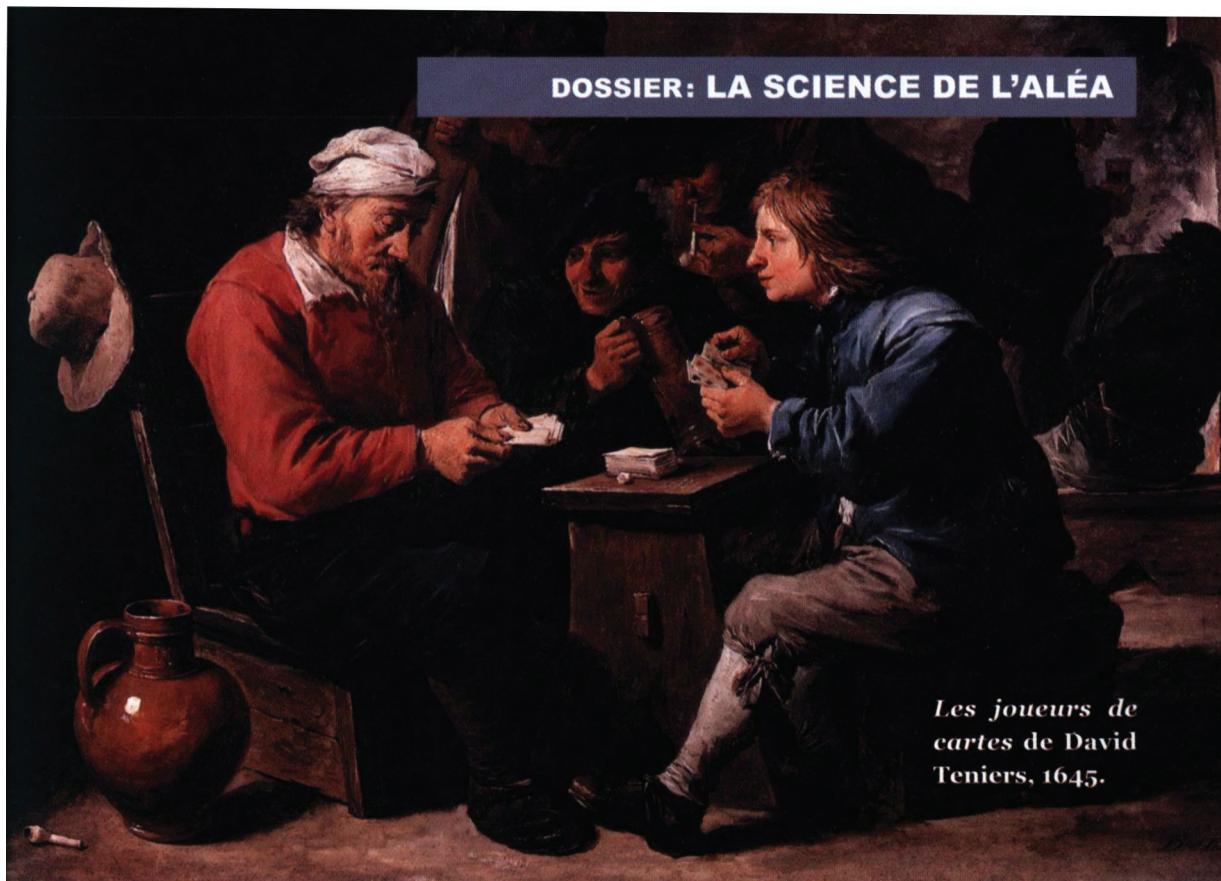
Alors que les problèmes se posent depuis l'Antiquité, c'est à la Renaissance qu'un début de théorie des probabilités apparaît.

Alors que les jeux de hasard existent depuis la plus haute Antiquité et que les problèmes statistiques pouvaient se poser au moins depuis l'origine des grands empires (recensements, problèmes d'assurances), c'est seulement à la Renaissance que des questions relatives aux probabilités ont commencées à être abordées de façon mathématique. Encore s'agit-il alors surtout de problèmes simples d'analyse combinatoire, où il s'agit principalement de dénombrer des cas. Par exemple, pour estimer les chances qu'une main de poker (5 cartes d'un jeu de 52) contienne une quinte royale ou une paire de rois, la démarche consiste à compter d'une part le nombre total de mains possibles au poker, d'autre part le nombre de mains « favorables », c'est-à-dire celles qui contiennent effectivement la quinte royale (ou la paire de rois, donc). En considérant que toutes les mains possibles ont les mêmes chances d'apparaître les unes

que les autres, on obtient la probabilité cherchée en faisant le rapport entre nombre de cas favorables et nombre de cas possibles.

Renoncer à la connaissance

On peut bien entendu contester cette démarche. Tout d'abord, rien ne prouve qu'il soit légitime de parler en termes de probabilités : après tout, l'ordre des cartes avant le début de la partie, la façon dont elles sont mélangées puis distribuées sont autant de points dont le caractère aléatoire est sujet à caution. Si les cartes étaient transparentes, chacun verrait à chaque instant quelles cartes sont distribuées, et la main de chacun ne serait plus perçue comme résultant d'un pur hasard. La bonne question à se poser n'est-elle donc pas plutôt de savoir comment anticiper la main qui sera la nôtre, ou celle des autres ? La démarche probabiliste n'est-elle pas la marque d'un aveu d'impuissance ?



Les joueurs de cartes de David Teniers, 1645.

D'un certain point de vue, il n'y a pas une très grande différence entre un scientifique qui cherche à découvrir les vérités cachées de la Nature et un tricheur au poker qui tâche de connaître les cartes des autres. Ce n'est peut-être pas un hasard si la théorie mathématique des probabilités, dont on fait généralement remonter les débuts au XVII^e siècle avec Pascal et Fermat, est née d'une question posée à Pascal par un joueur invétéré du nom de Méré, dont l'unique objectif était de savoir, parmi deux types de combinaisons aux dés, laquelle lui était la plus favorable...

La certitude des probabilités

Renoncer à une connaissance complète, accepter ce reliquat incompressible d'ignorance, c'est ouvrir la voie à l'étude rationnelle, mathématique, du hasard. Contrairement à une opinion

encore trop répandue, les probabilités ne sont pas une science plus «incertaine» que la géométrie euclidienne, la mécanique newtonienne ou la chimie minérale. Si l'objet de la théorie est, lui, insaisissable, la théorie bâtie dessus est aussi assurée que la plus rationnelle des constructions scientifiques. De plus, l'axiomatisation des probabilités réalisée par Kolmogorov au début du XX^e siècle a affranchi la théorie de toute référence au hasard : celui-ci ne subsiste qu'au travers d'un vocabulaire suggestif hérité de la «géométrie du hasard» pratiquée depuis Pascal. En d'autres termes (et même si nous n'aurons guère l'occasion de nous y intéresser dans ce hors-série), la théorie des probabilités qui intéresse aujourd'hui les mathématiciens n'a pas à proprement parler le «hasard» pour objet, même si elle se montre irremplaçable pour en donner des représentations cohérentes.

Poker menteur

Cela conduit naturellement à se poser la question de la pertinence du modèle probabiliste pour représenter le hasard tel qu'on l'observe. C'est là une autre objection à l'analyse précédente de nos chances au poker : rien ne prouve l'équiprobabilité des mains possibles. On pourrait rétorquer qu'il suffit de jouer suffisamment longtemps pour constater que toutes les combinaisons se produisent avec des fréquences voisines, donc qu'elles sont « équivalentes ». C'est là un argument de nature statistique, discipline « duale » des probabilités et dans laquelle on mène des expériences pour déterminer des probabilités, là où la théorie des probabilités part de données postulées pour anticiper des renseigne-

ments sur les expériences menées ensuite. En l'occurrence, l'argument statistique ne tient pas pour le poker, où il y a des millions de mains différentes : même le plus acharné des joueurs n'aura jamais le temps de les avoir toutes eues sous les yeux.

De même que l'existence du mouvement se démontre en marchant, la meilleure preuve de la puissance des probabilités et de leur capacité à représenter fidèlement le hasard est de constater leur omniprésence dans notre monde, aussi bien pour des questions pratiques que pour des problèmes théoriques. On n'imagine plus guère, aujourd'hui, comment se passer de cette « science de l'ignorance ».

B. R.

Un peu de vocabulaire

Le présent hors-série utilise quelques notations et définitions « classiques » des probabilités, que nous mentionnons brièvement ici et sur lesquelles nous reviendrons souvent.

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont l'issue n'est pas déterminée : jet d'un dé ou d'une pièce de monnaie, tirage au loto, etc.

Un *événement* en est une issue possible, comme « obtenir un nombre pair » ou « obtenir moins de 4 » pour un jet de dé.

À chaque événement A est attribué une *probabilité*, nombre entre 0 et 1 noté $P(A)$.

L'*intersection* de deux événements A et B, notée $A \cap B$, est la « conjonction » des deux.

Par exemple, toujours pour un jet de dé, l'intersection de « obtenir un nombre pair » et de « obtenir au plus 4 » est l'événement « obtenir soit 2, soit 4 ».

Deux événements sont *disjoints* si leur intersection est l'événement *vide* (ou *impossible*), comme pour « obtenir 6 » et « obtenir moins de 4 » (deux évé-

nements impossibles à réaliser en même temps). Dans ce cas, et dans ce cas seulement, la probabilité de la *réunion* $A \cup B$ (« obtenir soit 6, soit moins de 4 ») des deux événements, $P(A \cup B)$, est égale à $P(A) + P(B)$. L'événement vide est de probabilité nulle.

La *probabilité de A sachant B* (probabilité *conditionnelle*), $P(A/B)$, est la probabilité que A se réalise lorsqu'on sait que B s'est réalisé. Par exemple, la probabilité que le dé soit tombé sur un nombre pair sachant qu'il est tombé sur un nombre inférieur (strictement) à 4 est de $1/3$. Plus généralement, on dispose de la formule :

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B).$$

Enfin, deux événements A et B sont dits *indépendants* si la réalisation de l'un n'influe pas sur la probabilité de réalisation de l'autre, soit :

$$P(A/B) = P(A)$$

(ou, de manière équivalente : $P(B/A) = P(B)$).

Plus rigoureusement, A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$