

MATHEMATIQUES N°3

Remarque : rien de nouveau dans ce contrôle... On s'applique donc, et tout ira bien !

Exercice 1 : (2,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + x + 2$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

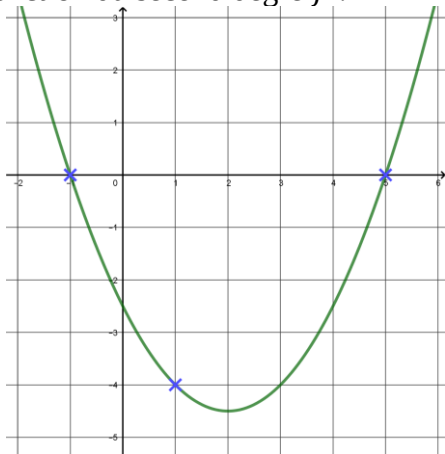
1. Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
2. Dédire de la question précédente une factorisation de $f(x)$.

Exercice 2 : (3,5 points)

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \frac{3x-5}{7x^2-2x-5}$
2. Résoudre l'inéquation $6x^2 - 4x + 1 \leq 2x^2 - 7x - 1$

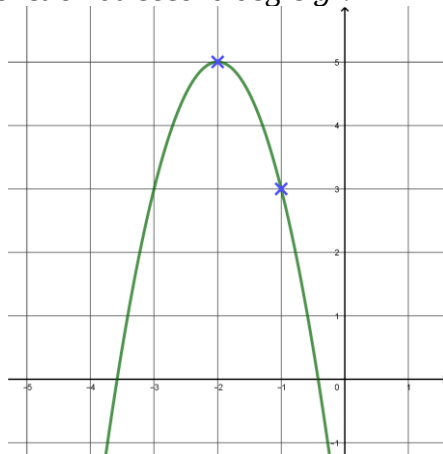
Exercice 3 : (5 points)

1. La parabole ci-dessous est la représentation graphique de la fonction du second degré f :



En justifiant la démarche, déterminer l'expression algébrique de $f(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$.

1. La parabole ci-dessous est la représentation graphique de la fonction du second degré g :



En justifiant la démarche, déterminer l'expression algébrique de $g(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$.

Exercice 4 : (3,5 points)

1. Déterminer le signe de $3x^2 + 2x - 5$. Autrement dit, faire un tableau de signes.
2. En déduire la résolution de $3x + 2 \geq \frac{5}{x}$

Indication : transformer l'inéquation puis faire un tableau de signes...

Exercice 5 : (2,5 points)

Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $(b-3)x^2 + bx + 4 = 0$.

Déterminer la ou les valeurs de b pour lesquelles cette équation admette une unique solution.

Exercice 6 : (3 points)

Résoudre l'équation $3x^4 - 31x^2 + 36$

Bonus : (+1,5 points)

1. A quelle période a-t-on commencé à mathématiser les questions relatives aux probabilités ?
2. De quel jeu l'article se sert-il pour illustrer les probabilités ?
3. Quels sont les deux mathématiciens à l'origine de la théorie mathématique des probabilités ?
4. A la fin de l'article, en parlant de la théorie mathématique des probabilités, on peut lire : *On n'imagine plus guère, aujourd'hui, comment se passer de cette « science de l'... »*. Quel est le mot manquant ?
5. Comment appelle-t-on une expérience dont l'issue n'est pas déterminée ?
6. On trouve dans l'article la notation $p(A/B)$: que signifie-t-elle ?

MATHEMATIQUES N°3

Exercice 1 : (2,5 points)

1. $f(x) = 0$ revient à $-3x^2 + x + 2 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-3) \times 2$$

$$= 1 + 24$$

$$= 25$$

$$\text{D'où : } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times (-3)}$$

$$= \frac{-1 - 5}{-6}$$

$$= \frac{-6}{-6}$$

$$= \frac{-6}{-6} = 1$$

et

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times (-3)}$$

$$= \frac{-1 + 5}{-6}$$

$$= \frac{-6}{-6}$$

$$= \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3}$$

Les coordonnées des points d'intersection sont $(1; 0)$ et $(\frac{-2}{3}; 0)$

2. $f(x) = -3(x-1)(x+\frac{2}{3})$

Exercice 2 : (3,5 points)

1. On va résoudre $7x^2 - 2x - 5 = 0$ pour déterminer les valeurs interdites.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 7 \times (-5)$$

$$= 4 + 140$$

$$= 144$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{144}}{2 \times 7}$$

$$= \frac{2 - 12}{14}$$

$$= \frac{-10}{14} = \frac{-5}{7}$$

$$= \frac{-10}{14} = \frac{-5}{7}$$

et

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{144}}{2 \times 7}$$

$$= \frac{2 + 12}{14}$$

$$= \frac{14}{14}$$

$$= \frac{14}{14} = 1$$

L'ensemble de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-5}{7}; 1\}$

2. $6x^2 - 4x + 1 \leq 2x^2 - 7x - 1$

$$6x^2 - 4x + 1 - 2x^2 + 7x + 1 \leq 0$$

$$4x^2 + 3x + 2 \leq 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times 2$$

$$= 9 - 32$$

$$= -23 < 0$$

$4x^2 + 3x + 2$ est donc toujours strictement positif : l'inéquation n'a pas de solutions !

Exercice 3 : (5 points)

1. On a $f(x) = a(x+1)(x-5)$

De plus $f(1) = -4$

$$a(1+1)(1-5) = -4$$

$$a \times 2 \times (-4) = -4$$

$$-8a = -4$$

$$a = \frac{-4}{-8} = 0,5$$

Donc $f(x) = 0,5(x+1)(x-5)$

$$= 0,5(x^2 - 5x + x - 5)$$

$$= 0,5x^2 - 2x - 2,5$$

2. On a $f(x) = a(x+2)^2 + 5$

De plus $f(-1) = 3$

$$a(-1+2)^2 + 5 = 3$$

$$a \times 1 + 5 = 3$$

$$a = 3 - 5 = -2$$

Donc $f(x) = -2(x+2)^2 + 5$

$$= -2(x^2 + 4x + 4) + 5$$

$$= -2x^2 - 8x - 8 + 5$$

$$= -2x^2 - 8x - 3$$

Exercice 4 : (3,5 points)

1. $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5)$

$$= 4 + 60$$

$$= 64$$

D'où : $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times 3}$

$$= \frac{-2 - 8}{6}$$

$$= \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$$

$$= \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$$

et

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-2 + 8}{6}$$

$$= \frac{6}{6} = 1$$

$$= \frac{6}{6} = 1$$

x	$-\infty$	$-5/3$	1	$+\infty$	
$3x^2 + 2x - 5$	+	0	-	0	+

2. Résolvons $3x + 2 \geq \frac{5}{x}$

$$3x + 2 - \frac{5}{x} \geq 0$$

$$\frac{3x^2 + 2x - 5}{x} \geq 0$$

1,5

x	$-\infty$	$-5/3$	0	1	$+\infty$	
$3x^2 + 2x - 5$	+	0	-	-	0	+
x	-		-	0	+	+
$\frac{3x^2 + 2x - 5}{x}$	-	0	+	-	0	+

Donc $x \in \left[-\frac{5}{3}; 0\right] \cup [1; +\infty[$ (2)

Exercice 5 : (2,5 points)

On doit avoir $\Delta = 0$. Autrement dit :

$$\Delta = b^2 - 4 \times (b - 3) \times 4$$

$$0 = b^2 - 16b + 48$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \times 1 \times 48 = 256 - 192 = 64$$

$$b_1 = \frac{16 - \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{16 - 8}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$b_2 = \frac{16 + \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{16 + 8}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

(1,5)

$(b - 3)x^2 + bx + 4 = 0$ admet donc une unique solution lorsque $b = 4$ ou $b = 12$.

Exercice 6 : (3 points)

On pose $X = x^2$ et l'équation devient $3X^2 - 31X + 36$

$$\Delta = (-31)^2 - 4 \times 3 \times 36 = 961 - 432 = 529$$

$$X_1 = \frac{31 - \sqrt{529}}{2 \times 3} = \frac{31 - 23}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$X_2 = \frac{31 + \sqrt{529}}{2 \times 3} = \frac{31 + 23}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

(1)

Autrement dit, $x^2 = \frac{4}{3}$ ou $x^2 = 9$

On a donc 4 solutions : $x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$
 $x = 3$ ou $x = -3$ (1)

Bonus : (+1,5 points)

1. A la Renaissance. (+0,25)

2. Le poker. (+0,25)

3. Pascal et Fermat. (+0,25)

4. Ignorance. (+0,25)

5. Aléatoire. (+0,25)

6. $p_B(A)$ (+0,25)