

SYSTÈMES LINÉAIRES

I Inverse d'une matrice carrée

1° Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

On dit que A est inversible s'il existe une matrice B d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$.

Cette matrice se note alors A^{-1} .

Propriété : Si cette matrice existe, elle est unique.

Preuve : Supposons qu'il existe deux matrices B et B' telles que $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$.

$$B'AB = B'(AB) = B'I_n = B' \quad \text{et} \quad B'AB = (B'A)B = I_n B = B$$

D'où $B = B'$.



Toute matrice non nulle n'admet pas nécessairement un inverse !

Ex : Montrons que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Supposons que A est inversible : il existe alors B telle que $BA = I_n$.

$$BA \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B \left(A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (BA) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$BA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (BA) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on aurait $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui est absurde.

Propriété : Soit A une matrice carrée d'ordre n .

S'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

⇒ Cette propriété indique qu'il n'est pas nécessaire de vérifier $AB = I_n$ et $BA = I_n$

Ex : vérifier que l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ est $B = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -24 + 40 - 15 & 18 - 30 + 12 & 5 - 8 + 3 \\ 0 + 20 - 20 & 0 - 15 + 16 & 0 - 4 + 4 \\ -120 + 120 + 0 & 90 - 90 + 0 & 25 - 24 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc A est inversible et son inverse est B .

Exercice : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $M^2 = aM + bI_3$
2. En déduire l'inverse de M .

$$\begin{aligned} 1. M^2 &= \begin{pmatrix} 0 - 3 + 1 & 0 + 4 - 1 & 0 - 3 + 0 \\ 0 - 12 + 3 & -3 + 16 - 3 & 3 - 12 + 0 \\ 0 - 3 + 0 & -1 + 4 + 0 & 1 - 3 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 0 & -9 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -2I_3 + 3M \end{aligned}$$

2. On a alors $2I_3 = 3M - M^2$

$$= M(3I_3 - M) \quad \triangle ! \quad \text{Ne pas oublier } I_3$$

$$\text{D'où } I_3 = \frac{M(3I_3 - M)}{2}$$

$$= M \left(\frac{1}{2} (3I_3 - M) \right)$$

Donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{2}(3I - M)$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2° Cas des matrices 2×2

Propriété : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

$\hookrightarrow$ Si $ad - bc \neq 0$ alors A admet un inverse et $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ Si $ad - bc = 0$ alors A n'admet pas d'inverse.

Le nombre $ad - bc$ est appelé **déterminant** de A. On le note $\det(A)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$af = -bh \text{ et } ce = -dg$$

$$\begin{aligned} aef + bgf &= f \\ -bhe + bgf &= f \end{aligned}$$

Ex : La matrice $A = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

$$\det(A) = 12 \times (-6) - (-9) \times 4$$

$$= -72 + 36 = -36 \neq 0 \text{ donc A est inversible.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-36} \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$$

3° Application au calcul de puissances

Ex : Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1° a. A l'aide de la calculatrice, déterminer $D = P^{-1}AP$.

2° a. Déterminer l'expression de A puis de A^2 en fonction de D, P et P^{-1} .

b. Déterminer alors l'expression explicite de A^n .

1° On obtient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2° a. On a $D = P^{-1}AP$ donc $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1}$

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PDIDP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1} \end{aligned}$$

b. On peut conjecturer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$

$A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc la propriété est vérifiée.

Hérédité : supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour un certain rang n .

Montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD^nIDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Par récurrence, on a bien $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 5 \\ 2^n & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2^{n+1} - 5 & -5 \times 2^{n+1} + 10 \\ 3 \times 2^n - 3 & -5 \times 2^n + 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

II Systèmes linéaires

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est de la forme :

$$(S) \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \text{ où } a, b, c, d, e \text{ et } f \text{ sont des nombres}$$

Les solutions de ce système sont les couples $(x ; y)$ vérifiant simultanément ces deux équations.

Si on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, le système (S) s'écrit alors $AX = B$.

Théorème : Si A est inversible, alors (S) admet une unique solution définie par $X = A^{-1}B$.

Preuve : On a $AX = B$. Or, A est inversible, d'où $A^{-1}AX = A^{-1}B$

$$I_n X = A^{-1}B \text{ c'est-à-dire } X = A^{-1}B$$

Remarques : 1. Ce théorème se généralise aux systèmes de n équations linéaires à n inconnues

2. Si la matrice associée au système n'est pas inversible, alors l'ensemble des solutions est vide ou contient une infinité de solutions.

Ex : On considère le système $(S) \begin{cases} -x + 4y = 9 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$: (S) s'écrit alors $AX = B$.

$$\det(A) = -1 \times 2 - 3 \times 4$$

$$= -14 \neq 0 \text{ donc } A \text{ est inversible.}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } X = A^{-1}B &= \frac{-1}{14} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{14} \begin{pmatrix} 14 \\ -28 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solution de ce système est donc $x = -1$ et $y = 2$.

Ex : Tous les jours, un professeur passe à la boulangerie pour acheter des viennoiseries à ses élèves.

- Le lundi, il achète 15 viennoises, 8 croissants et 12 pains aux raisins pour 36,60 €.
- Le mardi, il achète 11 viennoises, 15 croissants et 9 pains aux raisins pour 35,30 €.
- Le mercredi, il achète 9 viennoises, 10 croissants et 16 pains aux raisins pour 37,20 €.

Le jeudi, il prend 12 chocolaines, 11 croissants et 12 pains aux raisins : combien paiera-t-il ?

Notons v le prix d'une viennoise, c le prix d'un croissant et p le prix d'un pain aux raisins.

$$\text{On obtient alors le système } \begin{cases} 15v + 8c + 12p = 36,6 \\ 11v + 15c + 9p = 35,3 \\ 9v + 10c + 16p = 37,20 \end{cases}$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 12 \\ 11 & 15 & 9 \\ 9 & 10 & 16 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 36,6 \\ 35,3 \\ 37,2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} v \\ c \\ p \end{pmatrix}$: on a alors $AX = B$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,9 \\ 1,2 \end{pmatrix}$

Une viennoise coûte donc 1 €, un croissant 0,90 € et un pain aux raisins 1,20 €.

$$12 \times 1 + 11 \times 0,9 + 12 \times 1,2 = 36,30$$

Le jeudi, il paiera donc 36,30 €.

⇒ A ce stade, la résolution d'un système nécessite donc de déterminer l'inverse d'une matrice, ce qui n'est pas simple. Mais c'est pratique avec une calculatrice...

Réciproquement, si l'on sait résoudre un système *à la main*, cela permet de déterminer l'inverse d'une matrice.

Ex : Prenons le système $\begin{cases} -x + 4y = a \\ 3x + 2y = b \end{cases}$

$$3L_1 + L_2 : 14y = 3a + b$$

$$y = \frac{3a + b}{14} = \frac{3}{14}a + \frac{1}{14}b$$

$$L_1 \text{ donne alors } -x + 4\left(\frac{3}{14}a + \frac{1}{14}b\right) = a$$

$$\frac{12}{14}a + \frac{4}{14}b - \frac{14a}{14} = x$$

$$x = \frac{-2}{14}a + \frac{4}{14}b$$

$$\text{D'où } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{14} & \frac{4}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$