

DIVISIBILITÉ

I Définition & propriétés

Définition : Soit $(a ; b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que b divise a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$.

« b divise a » se note $b|a$.

On peut également dire que b est un diviseur de a , que a est un multiple de b ou encore que a est divisible par b .

Ex : On sait que $35 = 5 \times 7$ donc $5|35$ c'est-à-dire que 5 est un diviseur de 35.

De même, $7|35$ c'est-à-dire que 7 est un diviseur de 35.

Enfin, 35 est divisible par 5 (et par 7) ou 35 est un multiple de 5 (et de 7)

Remarques : 1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $1|n$, $-1|n$, $n|n$, $-n|n$ et $n|0$

2. Attention : 0 ne divise personne sauf lui-même !

3. Si $b|a$ alors $-b|a$

4. Si $b|a$ et $a \neq 0$ alors $|b| \leq |a|$.

Ainsi, tout diviseur positif de a est compris entre 1 et $|a|$, ce qui implique que tout entier naturel non nul a un nombre fini de diviseurs

Ex : les diviseurs de 42 dans $\mathbb{N}$ sont 1 et 42, 2 et 21, 3 et 14, 6 et 7.

Et dans $\mathbb{Z}$, il y a -42, -21, -14, -7, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 et 42

Ex : Pour quelles valeurs de $n \neq 4$ le quotient $\frac{35}{n-4}$ est-il entier ?

Il faut que $(n-4)|35$ c'est-à-dire que $n-4$ soit un diviseur de 35.

D'où $n-4 \in \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$

Donc $n \in \{-31, -3, -1, 3, 5, 9, 11, 39\}$

Propriété 1 : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

Si $a|b$ et $b|a$ alors $a = \pm b$.

Preuve : $b|a$ donc $a = kb$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Et de même, $a|b$ donc $b = k'a$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

Donc $a = kb = kk'a$.

Ainsi, $kk' = 1$ avec k et k' entiers, ce qui implique que $k = k' = \pm 1$.

Propriété 2 : Soient a , b et c trois entiers relatifs, $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$.

$\Rightarrow$ On dit que la divisibilité est **transitive**.

Preuve : On a $b = ka$ et $c = k'b$ avec $(k ; k') \in \mathbb{Z}^2$. Donc $c = kk'a$.

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs. Tout entier de la forme $ma + nb$ où $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ est appelé « **combinaison linéaire** » de a et b .

Propriété 3 : Soient a , b et d trois entiers relatifs, $d \neq 0$.

Si $d|a$ et $d|b$ **alors** $d|(ma + nb)$ où $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

Autrement dit, si $d|a$ et $d|b$ alors d **divise toute combinaison linéaire de a et b** .

Preuve : On a $a = kd$ et $b = k'd$ avec $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$.

D'où $ma + nb = mkd + nk'd = (mk + nk')d$

Autrement dit, $d|(ma + nb)$.

Ex : Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $n + 7$ divise $3n + 32$.

Si $n + 7|3n + 32$, puisque $n + 7|n + 7$ **alors** $n + 7|(3n + 32 - 3(n + 7))$

Autrement dit, $n + 7|(3n + 32 - 3n - 21)$, c'est-à-dire $n + 7|11$.

Reste à vérifier la réciproque : supposons que $n + 7|11$.

Si $n + 7|11$, puisque $n + 7|n + 7$ **alors** $n + 7|(3(n + 7) + 11)$

Autrement dit, $n + 7|3n + 21 + 11$, c'est-à-dire $n + 7|3n + 32$.

Ainsi, $n + 7|3n + 32$ **si et seulement si** $n + 7|11$.

Donc $n + 7 \in \{-11, -1, 1, 11\}$, c'est-à-dire $n \in \{-18; -8; -6; 4\}$.



Supposons que $n|2n + 11$. Or, $n|n$ donc $n|(3(2n + 11) - 6n)$

$n|6n + 33 - 6n$ c'est-à-dire $n|33$

Donc $n \in \{-33; -11; -3; -1; 1; 3; 11; 33\}$.

Mais si $n = 3$ alors $2n + 11 = 2 \times 3 + 11 = 17$ et $3 \nmid 17$.

$\{-33; -11; -3; -1; 1; 3; 11; 33\}$ est l'ensemble des solutions **possibles** : **si** n est solution, **alors** il appartient à cet ensemble. Mais tous les nombres de cet ensemble **ne sont pas nécessairement des solutions...** D'où l'importance de faire la réciproque.

Ex : Trouver tous les entiers relatifs x et y tels que $x^2 - y^2 = 7$.

On observe que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Par conséquent, $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs de 7.

Or, les diviseurs de 7 dans $\mathbb{Z}$ sont $-7 ; -1 ; 1 ; 7$.

Ainsi, si $(x ; y)$ est solution de $x^2 - y^2 = 7$, alors :

$$\begin{array}{cccc} \left\{ \begin{array}{l} x + y = -7 \\ \square \\ x - y = -1 \end{array} \right. & \text{ou} & \left\{ \begin{array}{l} x + y = -1 \\ \square \\ x - y = -7 \end{array} \right. & \text{ou} & \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ \square \\ x - y = 7 \end{array} \right. & \text{ou} & \left\{ \begin{array}{l} x + y = 7 \\ \square \\ x - y = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x = -8 \\ \square \\ x + 1 = y \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} 2x = -8 \\ \square \\ x + 7 = y \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} 2x = 8 \\ \square \\ x - 7 = y \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} 2x = 8 \\ \square \\ x - 1 = y \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ \square \\ y = -3 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ \square \\ y = 3 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ \square \\ y = -3 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ \square \\ y = 3 \end{array} \right. \end{array}$$

Réciproquement, on peut vérifier que chacun de ces quatre couples est bien solution de $x^2 - y^2 = 7$.

Ainsi, les solutions de $x^2 - y^2 = 7$ sont les couples $(-4 ; -3), (-4 ; 3), (4 ; -3)$ et $(4 ; 3)$.

Remarque : On aurait pu montrer que si $(x ; y)$ est solution, alors $(-x ; y), (x ; -y)$ et $(-x ; -y)$ sont aussi des solutions.

Supposons par exemple que $(x ; y)$ est solution, autrement dit que $x^2 - y^2 = 7$.

$(-x)^2 - y^2 = x^2 - y^2 = 7$ donc $(-x ; y)$ est également solution.

Conclusion : on aurait pu limiter la recherche aux couples d'entiers naturels, puis déduire les autres solutions.

II Division euclidienne

Théorème : Soient a et b deux entiers naturels, $b \neq 0$.

Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est déterminer ce couple (q, r) .

a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Remarque : q est la partie entière de $\frac{a}{b}$

$\Rightarrow b|a$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Preuve : La démonstration comporte deux parties.

⇒ Existence :

Si $b > a$, alors $a = bq + r$ avec $q = 0$ et $r = a$. Et on a bien $0 \leq r < b$.

Si $b \leq a$, on choisit q tel que $bq \leq a < b(q + 1)$.

On a donc $bq \leq a < bq + b$

$$0 \leq a - bq < b$$

Posons $r = a - bq$. On a alors $0 \leq r < b$.

Et $a = bq + (a - bq) = bq + r$.

⇒ Unicité :

Supposons qu'existent deux couples (q_1, r_1) et (q_2, r_2) d'entiers naturels tel que $a = bq_1 + r_1$ et

$0 \leq r_1 < b$; et $a = bq_2 + r_2$ et $0 \leq r_2 < b$.

On a alors $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$

$$r_1 - r_2 = bq_2 - bq_1 = b(q_2 - q_1)$$

Autrement dit, $r_1 - r_2$ est un multiple de b .

Or, $0 \leq r_1 < b$ et $-b < -r_2 \leq 0$ et donc $-b < r_1 - r_2 < b$.

Au final, $r_1 - r_2$ est un multiple de b strictement compris entre $-b$ et b : la seule possibilité est 0,

c'est-à-dire $r_1 - r_2 = 0$ et donc $r_1 = r_2$.

D'où $0 = b(q_2 - q_1)$ et donc $q_2 = q_1$ car $b \neq 0$.

Ex : Effectuer la division euclidienne de 658 par 13

$658 : 13 \approx 50,6$ donc $q = 50$.

$50 \times 13 = 650$ donc $658 = 50 \times 13 + 8$

Ex 1 : Soit n un entier naturel.

1. Vérifier que $(n + 2)^3 = n^2(n + 6) + 12n + 8$

2. Cette écriture est-elle la division euclidienne de $(n + 2)^3$ par n^2 ?

1. D'une part, $n^2(n + 6) + 12n + 8 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$

D'autre part, $(n + 2)^3 = (n^2 + 4n + 4)(n + 2)$

$$= n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 8n + 4n + 8$$

$$= n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

Donc $(n + 2)^3 = n^2(n + 6) + 12n + 8$

2. Pour que ce soit la division euclidienne de $(n + 2)^3$ par n^2 , il faut que $0 \leq 12n + 8 < n^2$.

Il est clair que $12n + 8 \geq 0$: il reste donc à vérifier que $12n + 8 < n^2$

$$0 < n^2 - 12n - 8$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-12)^2 - 4 \times 1 \times (-8) & n_1 &= \frac{12 - \sqrt{176}}{2} & n_2 &= \frac{12 + \sqrt{176}}{2} \\ &= 144 + 32 & & \approx -0,6 & & \approx 12,6 \\ &= 176 & & & & \end{aligned}$$

Il faut donc que $n \in]-\infty ; n_1[\cup]n_2 ; +\infty[$.

Autrement dit, $n \geq 13$ car n est un entier naturel.

Ex 2 : Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A = n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 3.

⇒ Méthode : on procède par **disjonction des cas**, c'est-à-dire qu'on passe TOUS les cas en revue.

Dans la division euclidienne de n par 3, les restes possibles sont 0, 1 et 2.

n peut donc s'écrire $n = 3p$ ou $n = 3p + 1$ ou $n = 3p + 2$.

- Si $n = 3p$ alors $A = 3(p(3p + 1)(3p + 2))$
- Si $n = 3p + 1$ alors $A = (3p + 1)(3p + 2)(3p + 3)$
 $= 3((3p + 1)(3p + 2)(p + 1))$
- Si $n = 3p + 2$ alors $A = (3p + 2)(3p + 3)(3p + 4)$
 $= 3((3p + 2)(p + 1)(3p + 4))$

Ainsi, dans chaque cas, A est bien divisible par 3.

La rédaction d'une disjonction de cas notamment est fastidieuse : on a donc cherché à mettre au point une notion / une notation permettant de simplifier les choses et de les rendre plus efficaces. Ce sera le chapitre suivant : les congruences.

Il existe également une notion de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

Théorème (admis) : Soient a et b deux entiers relatifs, $b \neq 0$.

Il existe un couple unique (q, r) avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

Ex : $-21 = 5 \times (-4) - 1$ n'est pas la division euclidienne de -21 par -4 .

En effet, $-1 < 0 \dots$ La bonne écriture est $-21 = 6 \times (-4) + 3$.

La division de 82 par -8 est $82 = -10 \times (-8) + 2$

La division de -82 par -8 est $-82 = 11 \times (-8) + 6$