

COMPLEXES & GÉOMÉTRIE

Dans tout le chapitre, on se place dans le plan complexe munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I Pour aller plus loin

1° Une histoire de module

Propriété : Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B . Alors $AB = |z_B - z_A|$

$$\begin{aligned} \text{Preuve : } |z_B - z_A| &= |x_B + iy_B - (x_A + iy_A)| \\ &= |(x_B - x_A) + i(y_B - y_A)| \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB \end{aligned}$$

Application : Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

$$(1) |z - 3| = 1$$

$$\text{On pose } z_A = 3 \text{ d'où } |z_M - z_A| = 1$$

Autrement dit, $AM = 1$

L'ensemble des points est donc le cercle de centre $A(3 ; 0)$ et de rayon 1

$$(3) |z + i| = |z - 3|$$

$$\text{On pose } z_A = -i \text{ et } z_B = 3$$

$$\text{D'où } |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$$

Autrement dit, $AM = BM$

L'ensemble des points est donc la médiatrice de $[AB]$.

$$(5) |2iz - 2 + 4i| = 3$$

$$\left| 2i \left(z - \frac{1}{i} + 2 \right) \right| = 3$$

$$|2i| \left| z - \frac{i}{i^2} + 2 \right| = 3$$

$$2|z + i + 2| = 3$$

$$|z - (-i - 2)| = \frac{3}{2} \quad \text{c'est à dire } AM = \frac{3}{2} \text{ en posant } z_A = -2 - i$$

L'ensemble des points est donc le cercle de centre $A(-2 - i)$ et de rayon $\frac{3}{2}$

$$(2) |z + 2 - 5i| = 3$$

$$|z - (-2 + 5i)| = 3$$

$$\text{On pose } z_A = -2 + 5i \text{ d'où } |z_M - z_A| = 3$$

Autrement dit, $AM = 3$

Donc $M \in \mathcal{C}(A ; 3)$ où $A(-2 ; 5)$.

$$(4) |\bar{z} + 5 - i| = |z - 2 + 3i|$$

$$\left| \overline{\bar{z} + 5 - i} \right| = |z - (2 - 3i)|$$

$$|z + 5 + i| = |z - (2 - 3i)|$$

$$|z - (-5 - i)| = |z - (2 - 3i)|$$

$$\text{On pose } z_A = -5 - i \text{ et } z_B = 2 - 3i$$

On a alors $AM = BM$, ce qui correspond à la médiatrice de $[AB]$.

2° Une histoire d'argument

Propriété : Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points.

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Preuve : Soit M le point d'affixe z tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.

On a donc $z_B - z_A = z$.

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$$

$$= \arg z$$

$$= \arg(z_B - z_A)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD})$$

$$= -(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD})$$

$$= -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_D - z_C)$$

$$= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Ex : On donne $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -2 + 4i$ et $z_C = 5,5 + i$. Démontrer que A, B et C sont alignés.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{5,5 + i - (3 + 2i)}{-2 + 4i - (3 + 2i)}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{2,5 - i}{-5 + 2i}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{(2,5 - i)(-5 - 2i)}{25 + 4}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{-12,5 - 5i + 5i - 2}{29}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{-14,5}{29}\right)$$

$$= \pi$$

Les points sont donc bien alignés.

Remarque : A, B, C alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0 [\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Ex : On donne $z_R = -4 - i$, $z_S = -2 + 4i$ et $z_T = 3 + 2i$.

Calculer $\frac{z_R - z_S}{z_T - z_S}$ et en déduire que RST est rectangle isocèle.

$$\begin{aligned}\frac{z_R - z_S}{z_T - z_S} &= \frac{-4 - i - (-2 + 4i)}{3 + 2i - (-2 + 4i)} \\&= \frac{-4 - i + 2 - 4i}{3 + 2i + 2 - 4i} \\&= \frac{-2 - 5i}{5 - 2i} \\&= \frac{(-2 - 5i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} \\&= \frac{-10 - 4i - 25i + 10}{25 + 4} \\&= \frac{-29i}{29} \\&= -i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Or, } (\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{SR}) &= \arg\left(\frac{z_R - z_S}{z_T - z_S}\right) & \text{et} & \quad \frac{SR}{ST} = \left|\frac{z_R - z_S}{z_T - z_S}\right| \\&= \arg(-i) & & \quad = |-i| \\&= \frac{-\pi}{2} & & \quad = 1 \text{ donc } SR = ST\end{aligned}$$

Le triangle SRT est donc rectangle et isocèle en S.

$$\begin{aligned}\text{Remarque : } ABC \text{ rectangle en A} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\&\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est un imaginaire pur}\end{aligned}$$

II Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

1° Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racine $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Autrement dit, $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité différentes.

Ce sont les nombres complexes définis par $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour tout k entier compris entre 0 et $n - 1$.

On a donc $\text{Card}(\mathbb{U}_n) = n$ et on peut noter $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0 ; n - 1 \rrbracket\right\}$.

Preuve : Supposons que $z^n = 1$. On a alors $|z|^n = |z^n| = 1$.

Par conséquent, $|z| = 1$ car 1 est le seul réel vérifiant $x^n = 1$.

On peut donc chercher z sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0 ; 2\pi[$.

$$\text{Ainsi, } z^n = 1 \Leftrightarrow (e^{i\theta})^n = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{in\theta} = 1$$

$$\Leftrightarrow n\theta \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow n\theta = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Or $\theta \in [0 ; 2\pi[$ donc $n\theta \in [0 ; 2n\pi[$. On peut donc se limiter à k compris entre 0 et $n - 1$.

$$\text{D'où } z^n = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \llbracket 0 ; n - 1 \rrbracket$$

Reste à vérifier que ces n éléments sont bien deux à deux distincts.

Soient k et k' deux entiers compris entre 0 et $n - 1$. On peut toujours supposer que $k > k'$.

$$z_k = z_{k'} \Leftrightarrow e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2r\pi \text{ avec } r \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2k\pi = 2k'\pi + 2nr\pi$$

$$\Leftrightarrow k = k' + nr$$

$$\Leftrightarrow k - k' = nr$$

Or, $0 \leq k - k' \leq n - 1$: le seul multiple de n compris entre 0 et $n - 1$ est 0.

D'où $k - k' = 0$ c'est-à-dire $k = k'$.

Les z_k sont donc deux à deux distincts.

Ex : Les racines 3^{ièmes} de l'unité sont :

$$w_0 = e^{\frac{2i \times 0 \times \pi}{3}}$$

$$= e^0 = 1$$

$$w_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$= \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$= \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les racines 4^{ièmes} de l'unité sont :

$$w_0 = e^{\frac{2i \times 0 \times \pi}{4}}$$

$$= e^0 = 1$$

$$w_1 = e^{\frac{2i \times 1 \times \pi}{4}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$w_2 = e^{\frac{2i \times 2 \times \pi}{4}}$$

$$= e^{i\pi} = -1$$

$$w_3 = e^{\frac{2i \times 3 \times \pi}{4}}$$

$$= e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$$

Ex : résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(iz + 1)^4 = 1$

$iz + 1$ est donc une racine 4^{ième} de l'unité. D'où :

$$iz + 1 = 1$$

$$iz + 1 = i$$

$$iz + 1 = -1$$

$$iz + 1 = -i$$

$$iz = 1 - 1$$

$$iz = i - 1$$

$$iz = -1 - 1$$

$$iz = -i - 1$$

$$z = 0$$

$$z = -i(i - 1)$$

$$z = -i \times (-2)$$

$$z = -i(-i - 1)$$

$$= 1 + i$$

$$= 2i$$

$$= -1 + i$$

Ex : résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $5(z - i)^3 = 40$

$$(z - i)^3 = \frac{40}{5} = 8$$

$$(z - i)^3 = 2^3$$

$$\frac{(z - i)^3}{2^3} = 1$$

$$\left(\frac{z - i}{2}\right)^3 = 1$$

$\frac{z - i}{2}$ est donc une racine 3^{ième} de l'unité. D'où :

$$\frac{z - i}{2} = 1$$

$$\frac{z - i}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$\frac{z - i}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$z - i = 2$$

$$z - i = 2 \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z - i = 2 \left(\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -1 + i\sqrt{3} + i$$

$$= -1 - i\sqrt{3} + i$$

$$= -1 + i(1 + \sqrt{3})$$

$$= -1 + i(1 - \sqrt{3})$$

Remarques : 1. $\mathbb{U}_n$ est stable par **multiplication** et par **passage à l'inverse** (sous-ensemble de $\mathbb{U}$)

2. La somme des racines n^{ières} de l'unité vaut **zéro** et leur produit vaut $(-1)^{n+1}$.

Notation : $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$ et $\prod_{k=0}^{n-1} w_k = (-1)^{n+1}$ □ □ □ Preuves dans le prochain chapitre...

3. On peut définir les racines n^{ières} d'un nombre complexe Z quelconque comme étant les solutions de l'équation $z^n = Z$.

Si $Z = re^{i\theta}$ alors $z = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\theta}{n}}$ est une racine n^{ième} de Z .

Plus précisément, les racines n^{ières} d'un nombre complexe Z sont **les produits de l'une d'entre elles avec les racines n^{ières} de l'unité.**

2° Représentation géométrique

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité découpent le cercle trigonométrique en n parties égales.

En les plaçant sur le cercle trigonométrique, on obtient un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle dont un des sommets est le point d'affixe 1.

Cas $n = 3$

On obtient un triangle équilatéral dont les sommets ont pour affixes

$$w_0 = 1, w_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } w_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

On note généralement $w_1 = j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a alors $w_2 = j^2 = \bar{j}$.

Cas $n = 4$

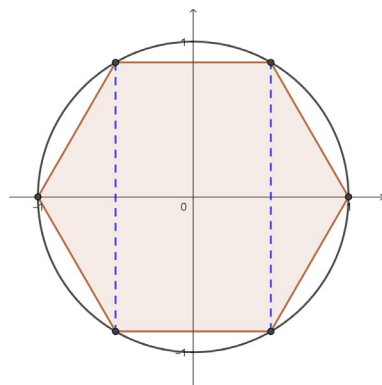
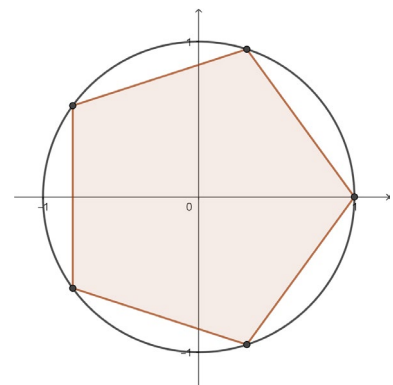
On obtient un carré dont les sommets ont pour affixes $1, i, -1$ et $-i$.

Cas $n = 5$

Bien plus délicat à tracer...

On peut montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$\Rightarrow$ ce nombre est constructible « à la règle et au compas » :



Cas $n = 6$

On obtient un hexagone régulier dont les sommets ont pour

affixes $w_0 = 1, w_1 = e^{\frac{2i\pi}{6}}, w_2 = e^{\frac{4i\pi}{6}}, w_3 = e^{\frac{6i\pi}{6}}, w_4 = e^{\frac{8i\pi}{6}}$
et $w_5 = e^{\frac{10i\pi}{6}}$.

On sait placer ces points (valeurs remarquables de cos et de sin)

Remarque : la longueur du côté de l'hexagone régulier est égale au rayon du cercle...