

FORME EXPONENTIELLE

I Préliminaires

1° Trigonométrie

Propriété : Soit a et b deux nombres réels.

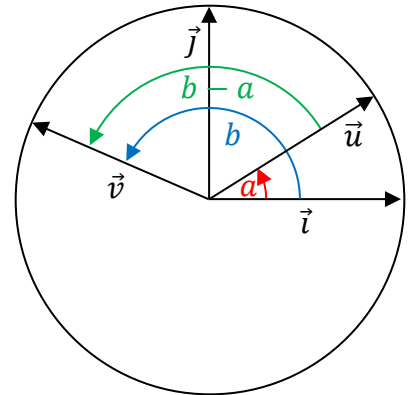
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Preuve : On se place dans un repère orthonormé du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère un vecteur $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 1$ et $(\vec{i}; \vec{u}) = a$.

De même, on considère un vecteur $\vec{v}$ tel que $\|\vec{v}\| = 1$ et $(\vec{i}; \vec{v}) = b$.



A
U

$$\text{On a alors } \vec{u} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}.$$

P
R
O
G
R
A
M
M
E

$$\text{D'une part, } \vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\text{Et d'autre part, } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

$$= 1 \times 1 \times \cos(b - a)$$

$$= \cos(-(b - a)) \quad \text{car } \cos(-x) = \cos x$$

$$= \cos(a - b)$$

$$\text{D'où } \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\text{Et } \cos(a + b) = \cos(a - (-b))$$

$$= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$$

$$= \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Propriété : Soit x un nombre réel.

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x & \text{et} & \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x & \text{et} & \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{aligned} \right\}$$

à retrouver sur un cercle trigonométrique !

Preuve : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x$

$$= 0 \times \cos x + 1 \times \sin x = \sin x$$

$$\text{Et de là, } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Propriété : Soit a et b deux nombres réels.

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\sin(a - b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b \\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Et } \sin(a + b) &= \sin(a - (-b)) \\ &= \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) \\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

Ex : déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

On remarque que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} & &= \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} & &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} & &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Propriété : Soit a un nombre réel quelconque.

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 a\end{aligned}$$

$$\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$$

Preuve : Il s'agit d'un cas particulier des formules précédentes.

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a + a) & \sin(2a) &= \sin(a + a) \\ &= \cos a \cos a - \sin a \sin a & &= \sin a \cos a + \cos a \sin a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a & &= 2 \sin a \cos a\end{aligned}$$

Or, $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ d'où les deux autres versions pour $\cos(2a)$.

Ex : déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{8}\right)$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) - 1$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$\frac{-\sqrt{2} + 2}{2} = 2 \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\frac{-\sqrt{2} + 2}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Or, } \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) < 0 \text{ donc } \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{Puis } \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$= 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{4 - (2 - \sqrt{2})}{4}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Or, } \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) > 0 \text{ donc } \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

2° Argument d'un produit

On a déjà annoncé dans le chapitre précédent – sans le prouver – que $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$.

Posons $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$.

$$zz' = r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$$= rr'(\cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta')$$

$$= rr'(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta'))$$

$$= rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

Cette écriture est la forme trigonométrique de zz' .

On en déduit donc que $\arg(zz') = \theta + \theta'$

$$= \arg z + \arg z'$$

Et pour l'argument d'un quotient, il suffit de poser $Z = \frac{z'}{z}$ ce qui donne $Zz = z'$ etc.

3° Formule du binôme de Newton

Soient $(a ; b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

De manière intuitive, lorsqu'on développe $(a + b)^n$, il y a n facteurs $(a + b)$. Pour chacun de ces facteurs, on a un choix à faire : prendre a ou b dans le développement.

Si l'on choisit k fois le a par exemple, on va voir apparaître a^k dans le développement ; et il existe $\binom{n}{k}$ manière de choisir dans quel facteur on le prend. Par ailleurs, chaque fois qu'on ne prend pas le a (c'est-à-dire les $n - k$ autres fois), on choisit le b ; d'où le b^{n-k} .

$\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ peut se lire « k choix de a parmi n facteurs $(a + b)$, le a répété k fois et le b le reste du temps, soit $n - k$ fois. »

Preuve : elle s'effectue par récurrence.

Initialisation : $n = 0$

$$(a + b)^0 = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$$

Hérédité : supposons que $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pour un certain n .

$$\text{Montrons que } (a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

$$S = (a + b)^{n+1}$$

$$= (a + b)(a + b)^n$$

$$= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{par HR}$$

$$= (a + b) \left(\binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n} a^n b^0 \right)$$

$$= \left(\binom{n}{0} a^1 b^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^3 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^n b^1 + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \right)$$

$$+ \left(\binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{1} a^1 b^n + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^2 + \binom{n}{n} a^n b^1 \right)$$

$$= 1a^0 b^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right) a^1 b^n + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right) a^2 b^{n-1} + \dots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right) a^n b^1 + 1a^{n+1} b^0$$

$$= 1a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^1 b^n + \binom{n+1}{2} a^2 b^{n-1} + \dots + \binom{n+1}{n} a^n b^1 + 1a^{n+1} b^0$$

$$= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^1 b^n + \binom{n+1}{2} a^2 b^{n-1} + \dots + \binom{n+1}{n} a^n b^1 + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Par récurrence, on a donc $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pour tout entier naturel n .

Pour une preuve sans les « ... », il faudra attendre les études supérieures

Remarque : en pratique, on écrit souvent la formule « à l'envers »

Ex : Développer les expressions suivantes :

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

Remarque : $(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (-b)^{n-k}$

⇒ On effectue le développement normalement en alternant les signes (attention à le faire « à l'envers » dans ce cas !)

Ex : $(a - b)^3 = 1a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 1b^3$

$$(a - b)^4 = 1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a - b)^5 = 1a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - 1b^5$$

Propriété : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Preuve : il s'agit tout simplement des développements de $(1 + 1)^n$ et de $(1 - 1)^n$ 😊

II Forme exponentielle

1° Définition

Soit $(\theta ; \theta') \in \mathbb{R}^2$. Posons $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$.

$$|f(\theta + \theta')| = 1 \text{ et } \arg(f(\theta + \theta')) = \theta + \theta'$$

$$\begin{aligned} |f(\theta) \times f(\theta')| &= |f(\theta)| \times |f(\theta')| & \text{et} & \arg(f(\theta) \times f(\theta')) = \arg f(\theta) + \arg f(\theta') \\ &= 1 \times 1 = 1 & & = \theta + \theta' \end{aligned}$$

Donc $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$

On reconnaît la propriété fondamentale de la fonction exponentielle : on pose donc $f(\theta) = e^{i\theta}$.

Définition : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Si $z \in \mathbb{C}^*$, l'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle de z , avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.

⇒ les complexes de la forme $e^{i\theta}$ sont donc situés sur le cercle trigonométrique.

Ex : $e^{i0} = 1$ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $e^{i\pi} = -1$ $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

2° Propriétés

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$$(1) e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour $n \in \mathbb{N}$ (généralisation)

$$(2) \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \quad \text{et} \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$\Rightarrow$ La formule de Moivre est essentiellement utilisée pour déterminer la forme trigonométrique des puissances $n^{\text{ièmes}}$ (et des racines $n^{\text{ièmes}}$) d'un nombre complexe et pour exprimer les cosinus / sinus multiples en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

Ex : exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.

$$\sin(3x) = \text{Im}(e^{3ix})$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } e^{3ix} &= (e^{ix})^3 \\ &= (\cos x + i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3 \cos^2 x (i \sin x) + 3 \cos x (i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \\ &= (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \sin(3x) &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x \\ &= 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Remarque : } \sin(3x) &= \sin(2x + x) \\ &= \underbrace{\cos(2x)} \sin x + \cos x \underbrace{\sin(2x)} \\ &= (1 - 2 \sin^2 x) \sin x + \cos x \times 2 \sin x \cos x \\ &= (1 - 2 \sin^2 x) \sin x + 2 \sin x \underbrace{\cos^2 x} \\ &= \sin x - 2 \sin^3 x + 2 \sin x (1 - \sin^2 x) \\ &= \sin x - 2 \sin^3 x + 2 \sin x - 2 \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x \end{aligned}$$



L'écriture $z = -2e^{\frac{i\pi}{3}}$ n'est pas une forme exponentielle à cause du « - »

Pour rectifier la chose, on peut utiliser le fait que $-1 = e^{i\pi}$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } z &= -2e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{i\pi} \times 2e^{\frac{i\pi}{3}} \\ &= 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\pi)} \\ &= 2e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{aligned}$$

3° Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Preuve : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta$

D'où $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta$

$$= 2\cos \theta$$

$$\text{Donc } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

De même, $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta - (\cos \theta - i \sin \theta)$

$$= \cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta$$

$$= 2i \sin \theta$$

$$\text{Donc } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Application : linéariser des exposants de fonctions trigonométriques, c'est-à-dire exprimer $\cos^n t$ et $\sin^n t$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

$\Rightarrow$ Si la fonction à linéariser est paire, on obtiendra uniquement des **cosinus**

Si la fonction à linéariser est impaire, on obtiendra uniquement des **sinus**

Donc pour les $\cos^n x$ on obtiendra uniquement des **$\cos(kx)$** et pour les $\sin^n x$, on obtiendra des **$\cos(kx)$ si n pair** et sinon des **$\sin(kx)$** .

$$\underline{\text{Ex}} : \cos^4 t = (\cos t)^4$$

$$= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4$$

$$= \frac{1}{2^4} \times (e^{it} + e^{-it})^4$$

$$= \frac{1}{16} (1e^{4it}e^0 + 4e^{3it}e^{-it} + 6e^{2it}e^{-2it} + 4e^{it}e^{-3it} + 1e^0e^{-4it})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4it} + 4e^{2it} + 6e^0 + 4e^{-2it} + e^{-4it})$$

$$= \frac{1}{16} ((e^{4it} + e^{-4it}) + 4(e^{2it} + e^{-2it}) + 6)$$

$$= \frac{1}{16} (2\cos(4t) + 8\cos(2t) + 6)$$

$$= \frac{1}{8} (3 + \cos(4t) + 4\cos(2t))$$

$$\begin{aligned}
\sin^5 t &= (\sin t)^5 \\
&= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^5 \\
&= \frac{1}{(2i)^5} \times (e^{it} - e^{-it})^5 \\
&= \frac{1}{32i} (1e^{5it}e^0 - 5e^{4it}e^{-it} + 10e^{3it}e^{-2it} - 10e^{2it}e^{-3it} + 5e^{it}e^{-4it} - 1e^0e^{-5t}) \\
&= \frac{1}{32i} (e^{5it} - 5e^{3it} + 10e^{it} - 10e^{-it} + 5e^{-3it} - e^{-5it}) \\
&= \frac{1}{32i} ((e^{i5t} - e^{-i5t}) - 5(e^{i3t} - e^{-i3t}) + 10(e^{it} - e^{-it})) \\
&= \frac{1}{32i} (2i \sin(5t) - 10i \sin(3t) + 20i \sin t) \\
&= \frac{1}{16} (\sin(5t) - 5 \sin(3t) + 10 \sin t)
\end{aligned}$$

La linéarisation permet entre autres de calculer des primitives.

Prenons $f(x) = \cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3 \cos(x))$.

Une primitive de $f(x)$ est $F(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin(3x) + 3 \sin(x) \right) = \frac{1}{12} (\sin(3x) + 9 \sin(x))$

Remarque : on peut retrouver les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ à partir de la forme exponentielle

On a $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$

Par ailleurs, $e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib}$

$$= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

$$= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

Et par **identification**
$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{cases}$$

Remarque : $\cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x - i^2 \sin^2 x$

$$= (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x)$$

$$= e^{ix} e^{-ix}$$

$$= e^0$$

$$= 1$$