

FORME TRIGONOMETRIQUE

Dans tout le chapitre, on se place dans le plan complexe munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I Représentation géométrique d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On lui associe le point $M(a ; b)$

Autrement dit, à tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on associe le point $M(\text{Re}(z) ; \text{Im}(z))$.

On dit que z est l'abscisse de M ou que M est l'ordonnée de z .

Remarques : 1. On peut noter $M(z)$ pour indiquer que M est le point d'abscisse z . (ou bien z_M)

2. L'axe des abscisses est aussi appelé axe des réels et celui des ordonnées axe des imaginaires

3. Le point d'abscisse $-z$ est le symétrique du point d'abscisse z par rapport à l'origine

4. Le point d'abscisse $\bar{z}$ est le symétrique du point d'abscisse z par rapport à (Ox)

Propriétés : Soient A et B deux points d'abscisses z_A et z_B . On a :

- $\overrightarrow{AB}$ a pour abscisse $z_B - z_A$ Cas particulier : $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M$
- Le milieu I de $[AB]$ a pour abscisse $\frac{z_A + z_B}{2}$

Par ailleurs, si $\vec{u}$ a pour abscisse $z_{\vec{u}}$ et $\vec{v}$ a pour abscisse $z_{\vec{v}}$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour abscisse $z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$, $\vec{u} - \vec{v}$ a pour abscisse $z_{\vec{u}} - z_{\vec{v}}$ et $k \times \vec{u}$ a pour abscisse $kz_{\vec{u}}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Ex : Considérons A, B, C et D d'abscisses $z_A = 6 - i$, $z_B = 5 + 4i$, $z_C = 5i$ et $z_D = 1$
Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

$$\begin{aligned}\text{Méthode 1 : } z_{\overrightarrow{AB}} &= 5 + 4i - (6 - i) & \text{et} & & z_{\overrightarrow{DC}} &= 5i - 1 \\ &= 5 + 4i - 6 + i \\ &= -1 + 5i\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ce qui signifie que $ABCD$ est un parallélogramme

Méthode 2 : Notons I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$

$$\begin{aligned}z_I &= \frac{6 - i + 5i}{2} & \text{et} & & z_J &= \frac{5 + 4i + 1}{2} \\ &= \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i & & & &= \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i\end{aligned}$$

Donc I et J sont confondus, ce qui signifie que $ABCD$ est un parallélogramme

Ex : Démontrer que les points R, S, T d'affixes $z_R = 7 + 3i$, $z_S = -2 - 3i$ et $z_T = 1 - i$ sont alignés.

⇒ Cela revient à montrer que **des vecteurs sont colinéaires**, et donc que **leurs affixes sont proportionnelles**.

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{RS}} &= -2 - 3i - (7 + 3i) & \text{et} & & z_{\overrightarrow{RT}} &= 1 - i - (7 + 3i) \\ &= -2 - 3i - 7 - 3i & & & &= 1 - i - 7 - 3i \\ &= -9 - 6i & & & &= -6 - 4i \\ &= -3(3 + 2i) & & & &= -2(3 + 2i) \end{aligned}$$

D'où $2z_{\overrightarrow{RS}} = 3z_{\overrightarrow{RT}}$: les points R, S et T sont donc bien alignés.

II Forme trigonométrique

1° Module

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On appelle module de z le réel positif ou nul noté $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ainsi, si M est le point d'affixe z , alors $|z| = OM$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Ex}} : |3 + 2i| &= \sqrt{3^2 + 2^2} & |5 - 3i| &= \sqrt{5^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{13} & &= \sqrt{34} \\ |-7 + i| &= \sqrt{(-7)^2 + 1^2} & |8i| &= \sqrt{0^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{50} & &= 8 \end{aligned}$$

⇒ Pour un réel, le module est la valeur absolue : $|-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$

Propriétés : Soit z un nombre complexe quelconque.

- (1) $|\bar{z}| = |z|$ et $|-z| = |z|$
- (2) $z\bar{z} = |z|^2$
- (3) $|zz'| = |z||z'|$ et donc $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Cas particulier : $|kz| = |k||z|$ où $k \in \mathbb{R}$ (valeur absolue de k fois module de z)

$$(4) \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et donc} \quad \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} \quad (\text{si } z \neq 0)$$

Preuves : Posons $z = a + ib$.

$$\begin{aligned} (1) \quad |\bar{z}| &= |a - ib| & \left| -z \right| &= |a - ib| \\ &= \sqrt{a^2 + (-b)^2} & &= \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} = |z| & &= \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \end{aligned}$$

$$(2) z\bar{z} = (a + ib)(a - ib)$$

$$= a^2 - i^2 b^2$$

$$= a^2 + b^2$$

$$= |z|^2$$

$$(3) |zz'| = |(a + ib)(a' + ib')|$$

$$= |(aa' - bb') + i(ab' + ba')|$$

$$= \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2}$$

$$= \sqrt{(aa')^2 - 2aa'bb' + (bb')^2 + (ab')^2 + 2aa'bb' + (ba')^2}$$

$$= \sqrt{(aa')^2 + (ab')^2 + (ba')^2 + (bb')^2}$$

$$\text{Et par ailleurs, } |z||z'| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}$$

$$= \sqrt{(aa')^2 + (ab')^2 + (ba')^2 + (bb')^2}$$

$$(4) \left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{a + ib} \right| = \left| \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} \right|$$

$$= \left| \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|}$$

$$\left| \frac{z'}{z} \right| = \left| z' \times \frac{1}{z} \right|$$

$$= |z'| \times \left| \frac{1}{z} \right|$$

$$= |z'| \times \frac{1}{|z|}$$

$$= \frac{|z'|}{|z|}$$

$$\underline{\text{Ex}} : |z| = |(1 + 2i)(-3 + i)|$$

$$= |(1 + 2i)| \times |(-3 + i)|$$

$$= \sqrt{1^2 + 2^2} \times \sqrt{(-3)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{5} \times \sqrt{10}$$

$$= \sqrt{50}$$

$$= 5\sqrt{2}$$

$$\left| \frac{2 + 6i}{3 - 4i} \right| = \frac{|2 + 6i|}{|3 - 4i|}$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 36}}{\sqrt{9 + 16}}$$

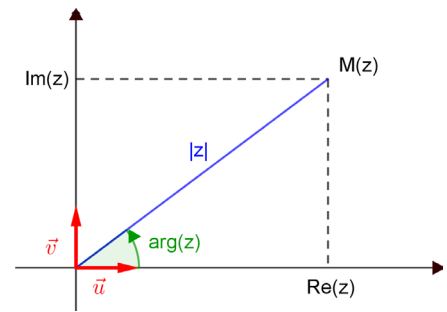
$$= \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

2° Argument

Définition : Soit z un complexe non nul et M le point d'affixe z .

On appelle argument de z toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. On le note $\arg(z)$.



Remarques : 1. Tout complexe non nul a une infinité d'arguments.

Si $\arg(z) = \theta$, alors les autres arguments de z sont de la forme $\theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On peut écrire $\arg(z) = \theta [2\pi]$ (se lit « θ modulo 2π »)

2. Le complexe $z = 0$ n'a pas d'argument car l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ n'existe pas dans ce cas.

Ex : Par lecture graphique :

$$\arg(3i) = \frac{\pi}{2} \quad \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4} \quad \arg(-3) = \pi \quad \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Propriétés : Soit z un complexe non nul.

(1) z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$

Plus précisément $\begin{cases} z \text{ est un réel positif} & \Leftrightarrow \arg(z) = 0[2\pi] \\ z \text{ est un réel négatif} & \Leftrightarrow \arg(z) = \pi[2\pi] \end{cases}$

(2) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

(3) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

(4) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

(5) Si $k \in \mathbb{R}^*$, $\arg(kz) = \begin{cases} \arg(z) & \text{si } k > 0 \\ \arg(z) + \pi & \text{si } k < 0 \end{cases}$

Preuves : Elles sont graphiques

(1) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.

(2) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.

(3) $M'(\bar{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses

(4) $M'(-z)$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'origine

(5) Visualiser graphiquement.

Propriétés : Soient z et z' deux complexes non nuls.

(1) $\arg zz' = \arg z + \arg z'$ et $\arg z^n = n \arg z$

(2) $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg z' - \arg z$ et en particulier, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z = \arg(\bar{z})$

3° Forme trigonométrique

Propriété : Soit $z = a + ib$ un complexe non nul et $\theta = \arg z$.

On a alors $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$; et donc $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$

Définition : Soit z un complexe non nul.

On appelle forme trigonométrique de z l'écriture $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ où $\begin{cases} r = |z| \\ \theta = \arg z \end{cases}$

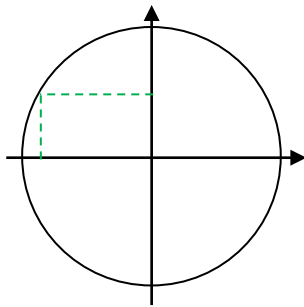
On dit que (r, θ) sont les **coordonnées polaires** de M .

Ex 1 : Déterminer la forme trigonométrique de $z = -\sqrt{3} + i$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{3 + 1} \\ &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \theta = \frac{5\pi}{6}$$



La forme trigonométrique de z est donc :

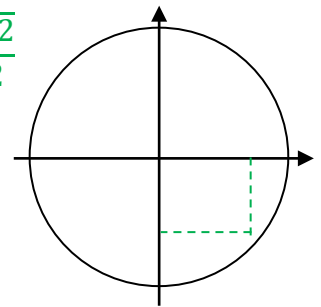
$$z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

Ex 2 : Déterminer la forme trigonométrique de $z = 2 - 2i$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 4} \\ &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \theta = \frac{-\pi}{4}$$



La forme trigonométrique de z est donc :

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right)$$

$z = 5 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ n'est pas la forme trigonométrique de z à cause du signe « - ».



On utilise alors les propriétés $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

D'où $z = 5 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{3} \right) \right)$ et notamment $\arg z = \frac{-\pi}{3}$

Ex 3 : On pose $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

On admet que $z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ et $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

Déterminer la forme trigonométrique de $z_1 z_2$ puis en déduire la valeur exacte de $\sin \frac{7\pi}{12}$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

$$= 2\sqrt{2} \times 2$$

$$= 4\sqrt{2}$$

$$\text{D'où } z_1 z_2 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}$$

$$= \frac{7\pi}{12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Par ailleurs, } z_1 z_2 &= (2 + 2i)(1 + i\sqrt{3}) \\
 &= 2 + 2i\sqrt{3} + 2i - 2\sqrt{3} \\
 &= (2 - 2\sqrt{3}) + i(2\sqrt{3} + 2)
 \end{aligned}$$

$$\text{Par identification : } 4\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{12} = 2\sqrt{3} + 2$$

$$\text{D'où } \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3} + 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Ex 4 : Placer dans le repère ci-dessous de manière exacte les points M_1 et M_2 d'affixes respectives :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 z_2 &= \sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right)
 \end{aligned}$$

- M_1 a pour coordonnées $(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

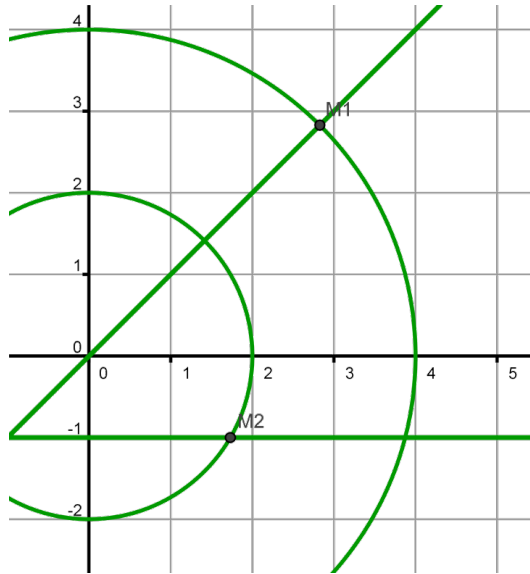
$|z_1| = 4$ donc $M_1 \in \mathcal{C}(0; 4)$.

$$\arg z_1 = \frac{\pi}{4} \text{ (facile à tracer)}$$

- M_2 a pour coordonnées $(\sqrt{3}; -1)$

Déjà, $M_2 \in (d_2)$ d'équation $y = -1$.

De plus, $|z_2| = 2$ donc $M_2 \in \mathcal{C}(0; 2)$.



Ex 5 : On donne $z = -\sqrt{3} - 3i$ Prouver que z^{147} est un nombre réel strictement positif.

$$\begin{aligned}
 |z| &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-3)^2} \\
 &= \sqrt{3+9} \\
 &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}
 \end{aligned}
 \quad
 \left.
 \begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{2} \\
 \sin \theta &= \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \square \\
 \square \\
 \square
 \end{array}
 \text{ d'où } \theta = \frac{-2\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \arg z^{147} &= 147 \times \arg z \\
 &= 147 \times \frac{-2\pi}{3} \\
 &= -98\pi = 0 [2\pi]
 \end{aligned}$$

Donc z^{147} est un réel strictement positif.

III Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. L'ensemble $\{M(z), z \in \mathbb{U}\}$ est le cercle trigonométrique.

Propriété : $\mathbb{U}$ est stable par produit et par passage à l'inverse.

Autrement dit, si $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ alors $zz' \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.