

# FORME ALGÈBRIQUE

## I Généralités

### 1° Pour la culture...

- 1545 : Jérôme Cardan (Italie) est confronté à des opérations faisant intervenir des racines carrées de nombres négatifs. Sacrilège : c'est impossible !
- 1572 : Rafaele Bombelli (Italie) formalise des règles de calcul autour de cette notion
- 1637 : René Descartes (France) qualifie ces nouveaux nombres d'imaginaires. Il n'y croit pas trop, mais sa notoriété apporte un certain éclairage sur la chose.
- 1777 : Leonhard Euler (Suisse) introduit le symbole  $i$  en lieu et place de  $\sqrt{-1}$  (et donc  $i^2 = -1$ )

*Longtemps regardés avec méfiance, ces nouveaux nombres finissent par devenir incontournables en raison de leurs nombreuses applications, notamment en mathématiques et en sciences physiques.*

### 2° L'ensemble $\mathbb{C}$

On définit un ensemble de nombres noté  $\mathbb{C}$  et appelé « ensemble des nombres complexes » tel que :

- $\mathbb{C}$  contient tous les nombres réels ( $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ )
- $\mathbb{C}$  est muni d'une addition (soustraction) et d'une multiplication (division) obéissant aux mêmes règles de calculs que dans  $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$  possède un nombre  $i$  tel que  $i^2 = -1$
- tout nombre de  $\mathbb{C}$  s'écrit de manière unique sous la forme  $a + ib$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Définition : soit  $z \in \mathbb{C}$ . L'écriture de  $z$  sous la forme  $z = a + ib$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  est appelée **forme algébrique** du complexe  $z$ .

Le nombre  $a$  est appelé **partie réelle** de  $z$  et noté  $\text{Re}(z)$

Le nombre  $b$  est appelé **partie imaginaire** de  $z$  et noté  $\text{Im}(z)$

On peut donc écrire  $z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z)$

Ex :  $z = -5 + 3i \rightarrow \text{Re}(z) = -5$  et  $\text{Im}(z) = 3$        $z = 3 - 2i \rightarrow \text{Re}(z) = 3$  et  $\text{Im}(z) = -2$

$z = 7 + i \rightarrow \text{Re}(z) = 7$  et  $\text{Im}(z) = 1$        $z = 8i \rightarrow \text{Re}(z) = 0$  et  $\text{Im}(z) = 8$

Remarques : Un nombre complexe  $z$  est réel si et seulement si **sa partie imaginaire est nulle**

Si  $\text{Re}(z) = 0$  on dit que  $z$  est un imaginaire pur

Propriété : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si **ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.**

$\Rightarrow$  c'est la conséquence directe de l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Cas particulier :  $z = 0$  si et seulement si  $\text{Re}(z) = 0$  et  $\text{Im}(z) = 0$

### 3° Calculs dans $\mathbb{C}$

Soient  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres complexes.

Addition / soustraction : on additionne les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.

Autrement dit,  $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

Ex : Donner la forme algébrique des complexes suivants :

$$A = (4 - 5i) + (3 + 2i)$$

$$= 4 + 3 - 5i + 2i$$

$$= 7 - 3i$$

$$B = -3 + 4i - (1 - 7i)$$

$$= -3 + 4i - 1 + 7i$$

$$= -4 + 11i$$

Produit : on développe de manière habituelle, en prenant en compte le fait que  $i^2 = -1$

Ex : Donner la forme algébrique des complexes suivants :

$$C = (3 + i)(7 - 4i)$$

$$= 21 - 12i + 7i - 4i^2$$

$$= 21 - 12i + 7i + 4$$

$$= 25 - 5i$$

$$D = (7 - 3i)^2$$

$$= 49 - 42i + 9i^2$$

$$= 49 - 42i - 9$$

$$= 40 - 42i$$

$$E = (6 + 5i)^2$$

$$= 36 + 60i + 25i^2$$

$$= 36 + 60i - 25$$

$$= 11 + 60i$$

$$F = (5 - 2i)(5 + 2i)$$

$$= 25 - 4i^2$$

$$= 25 + 16$$

$$= 41$$

Quotient : on multiplie le dénominateur par sa « forme conjuguée » (comme on le faisait pour faire disparaître un radical du dénominateur d'un quotient)

Ex : Donner la forme algébrique des complexes suivants :

$$G = \frac{4 + i}{1 + 3i}$$

$$= \frac{(4 + i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)}$$

$$= \frac{4 - 12i + i + 3}{1 + 9}$$

$$= \frac{7 - 11i}{10}$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{11}{10}i$$

$$H = \frac{5 - 4i}{2i - 3}$$

$$= \frac{(5 - 4i)(2i + 3)}{(2i - 3)(2i + 3)}$$

$$= \frac{10i + 15 + 8 - 12i}{-4 - 9}$$

$$= \frac{-2i + 23}{-13}$$

$$= \frac{-23}{13} + \frac{2}{13}i$$

## II Conjugaison

Définition : Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de  $z$  et on note  $\bar{z}$  le nombre complexe défini par  $\bar{z} = a - ib$  (on lit «  $z$  barre »)

Ex :  $z = -5 + 3i \rightarrow \bar{z} = -5 - 3i$

$z = 3 - 2i \rightarrow \bar{z} = 3 + 2i$

Propriétés : Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et  $z' \in \mathbb{C}$ , on a :

(1)  $\overline{\bar{z}} = z$

(2)  $z\bar{z} = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$

(3)  $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$

(4)  $z \text{ réel} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

$z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$

$z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Preuves : On pose  $z = a + ib$  avec  $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$ .

(1)  $\bar{\bar{z}} = \overline{a + ib}$

$= \overline{a - ib}$

$= a + ib = z$

(2)  $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib)$

$= a^2 + b^2$

$= \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$

(3)  $z + \bar{z} = a + ib + \overline{a + ib}$

$= a + ib + a - ib$

$= 2a$

$= 2\text{Re}(z)$

$z - \bar{z} = a + ib - \overline{a + ib}$

$= a + ib - (a - ib)$

$= a + ib - a + ib$

$= 2ib = 2i \text{Im}(z)$

(4)  $z \text{ réel} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$

$\Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$

$\Leftrightarrow \bar{z} = z$

$z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$

$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

$\Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Propriétés : Pour tout  $(z ; z') \in \mathbb{C}^2$ , on a :

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

$\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \text{ si } z' \neq 0$

Et par récurrence,  $\overline{z^n} = \bar{z}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

Preuves : On pose  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  :  $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'}$

$= \overline{(a + a') + i(b + b')}$

$= (a + a') - i(b + b')$

$= a - ib + a' - ib'$

$= \bar{z} + \bar{z}'$

$$\begin{aligned}
\overline{zz'} &= \overline{(a+ib)(a'+ib')} \\
&= \overline{aa' + iab' + iba' + i^2bb'} \\
&= \overline{aa' - bb' + i(ab' + a'b)} \\
&= aa' - bb' - i(ab' + a'b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{z} \times \bar{z'} &= \overline{a+ib} \times \overline{a'+ib'} \\
&= (a-ib)(a'-ib') \\
&= aa' - iab' - ia'b + i^2bb' \\
&= aa' - bb' - i(ab' + a'b)
\end{aligned}$$

Commençons par prouver que  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$  :

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \overline{\left(\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right)} \\
&= \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{z}} &= \frac{1}{a-ib} \\
&= \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} \\
&= \frac{a+ib}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

Et à partir de là, soyons malins :  $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}}$

$$= \bar{z} \times \overline{\frac{1}{z'}} \text{ en utilisant la propriété (2)}$$

$$= \bar{z} \times \frac{1}{z'} \text{ d'après le début de la propriété (3)}$$

$$= \frac{\bar{z}}{z'}$$

Ex : Donner la forme algébrique de  $\bar{z}$  lorsque  $z = (3-2i)(i+5)$  puis lorsque  $z = \frac{-3+4i}{1+2i}$

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \overline{(3-2i)(i+5)} \\
&= \overline{3-2i} \times \overline{i+5} \\
&= (3+2i) \times (-i+5) \\
&= -3i + 15 - 2i^2 + 10i \\
&= 17 + 7i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \overline{\left(\frac{-3+4i}{1+2i}\right)} \\
&= \frac{\overline{-3+4i}}{\overline{1+2i}} \\
&= \frac{-3-4i}{1-2i} \\
&= \frac{(-3-4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \\
&= \frac{-3-6i-4i-8i^2}{1+4} \\
&= \frac{5-10i}{5} = 1-2i
\end{aligned}$$

Remarque : on aurait pu préalablement déterminer la forme algébrique de  $z$  puis conjuguer...

### III Résolution d'équations

#### 1° Equations du 1<sup>er</sup> degré

➔ Si l'inconnue est  $z$  ou  $\bar{z}$ , pas de soucis ! On regroupe les inconnues, etc...

Ex : résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(2 - i)\bar{z} - 5 + 3i = (3 + 2i)\bar{z} + 1 - 3i$

$$(2 - i)\bar{z} - (3 + 2i)\bar{z} = 1 - 3i + 5 - 3i$$

$$(2 - i - 3 - 2i)\bar{z} = 6 - 6i$$

$$(-1 - 3i)\bar{z} = 6 - 6i$$

$$\bar{z} = \frac{(6 - 6i)(-1 + 3i)}{(-1 - 3i)(-1 + 3i)}$$

$$\bar{z} = \frac{-6 + 18i + 6i + 18}{1 + 9}$$

$$\bar{z} = \frac{12 + 24i}{10}$$

$$\bar{z} = \frac{6}{5} + \frac{12i}{5}$$

$$\text{D'où } z = \frac{6}{5} - \frac{12i}{5}$$

➔ Si  $z$  et  $\bar{z}$  figurent dans l'équation, on passe par la forme algébrique.

Ex : résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(1 - 3i)z + (4 + 5i)\bar{z} = -1 + 12i$

$$\text{Posons } z = x + iy : (1 - 3i)(x + iy) + (4 + 5i)(x - iy) = -1 + 12i$$

$$x + iy - 3ix + 3y + 4x - 4iy + 5ix + 5y = -1 + 12i$$

$$5x + 8y + (2x - 3y)i = -1 + 12i$$

$$\text{Par identification, on obtient } \begin{cases} 5x + 8y = -1 & (\times 2) \\ 2x - 3y = 12 & (\times 5) \end{cases} \quad \begin{cases} 10x + 16y = -2 \\ 10x - 15y = 60 \end{cases}$$

$$L_1 - L_2 : 31y = -62 \quad \text{d'où } y = \frac{-62}{31} = -2$$

$$\text{On remplace dans } L_2 : 2x - 3 \times (-2) = 12 \quad \text{c'est à dire } 2x + 6 = 12$$

$$2x = 12 - 6 \quad \text{c'est à dire } 2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

La solution de cette équation est donc  $z = 3 - 2i$ .

On parle « *d'identification* » des parties réelles et imaginaires pour indiquer qu'elles sont égales.

## 2° Equations du 2<sup>nd</sup> degré (à coefficients réels)

L'équation  $az^2 + bz + c = 0$  où  $a, b$  et  $c$  sont des **réels** avec  $a \neq 0$  admet dans  $\mathbb{C}$  deux solutions (éventuellement confondues).

Avec  $\Delta = b^2 - 4ac$ , on a :

↪ Si  $\Delta > 0$ , l'équation a deux solutions réelles distinctes :  $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

↪ Si  $\Delta = 0$ , l'équation a une seule solution réelle (double) :  $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a} (= \alpha)$

↪ Si  $\Delta < 0$ , l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \overline{z_1}$$

Et dans tous les cas, le trinôme se factorise sous la forme  $a(z - z_1)(z - z_2)$

Preuve : si  $\Delta < 0$ , on a  $\Delta = -(-\Delta) = i^2(-\Delta) = i^2\sqrt{-\Delta}^2$  et après, c'est comme en 1<sup>ère</sup> !

⇒ Tout nombre réel négatif peut donc s'écrire comme **un carré**.

$$\underline{\text{Ex}} : -9 = 9i^2 = (3i)^2 \qquad -28 = 28i^2 = 4 \times 7i^2 = (4i\sqrt{7})^2$$

Ex : Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation de Cardan :  $z(10 - z) = 40$

$$10z - z^2 = 40$$

$$z^2 - 10z + 40 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 40$$

$$= 100 - 160$$

$$= -60$$

$$= 60i^2 \quad \rightarrow \text{C'est comme si on avait } \sqrt{\Delta} = i\sqrt{60}$$

$$\text{D'où } z_1 = \frac{10 - i\sqrt{60}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1}$$

$$= \frac{10 - 2i\sqrt{15}}{2} = 5 + i\sqrt{15}$$

$$= 5 - i\sqrt{15}$$

Remarques : Si la consigne avait été de résoudre dans  $\mathbb{R}$ , on aurait conclu **que l'équation n'avait pas de solutions**.

2. Si la consigne avait été de factoriser  $z^2 - 10z + 40$ , cela aurait donné :

$$z^2 - 10z + 40 = 1 \left( z - (5 - i\sqrt{15}) \right) \left( z + (5 + i\sqrt{15}) \right)$$