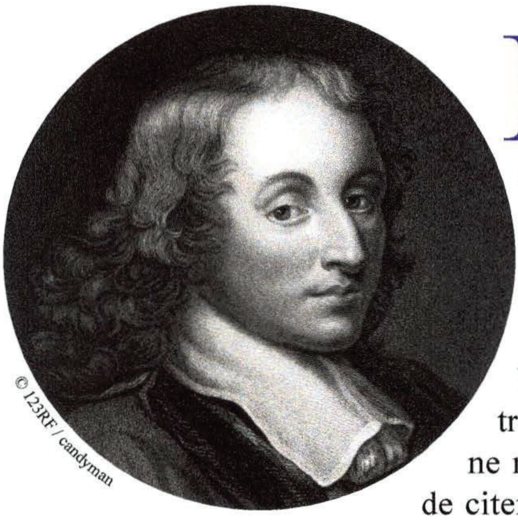
 par Fabien Aoustin

À qui est ce binôme ?

Il est souvent bien difficile de dater précisément l'apparition d'un énoncé, d'une notation ou d'un concept mathématique. D'ailleurs, il n'est pas rare que l'on attribue une dénomination à un savant qui n'en est pas l'inventeur. L'exemple de la formule du binôme de Newton est éloquent.



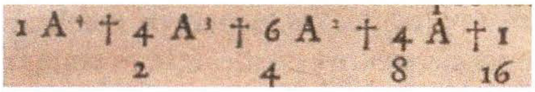
© 123RF / candyman

En 1665, lors de la publication du fameux *Traité du triangle arithmétique* que Blaise Pascal a rédigé en 1654, sont ajoutés quelques exemples d'*« usages »* de ce triangle. Le savant, bien conscient de tous les trésors que recèle son étude, ne manque évidemment pas de citer l'utilisation du triangle *« pour trouver les puissances de binômes »*.
Fidèle à son habitude, il prend bien soin d'exposer à ses lecteurs la méthode à suivre sur des exemples simples et éloquents. Ainsi, pour trouver le *« quatrième degré d'un binôme dont le premier nom sont A, l'autre l'unité c'est-à-dire [...] le quarré-quarré de A + 1, il faut prendre dans le triangle arithmétique la base cinquième »*. Autrement dit, si vous voulez développer $(A + 1)^4$, il vous faut utiliser les coefficients 1, 4, 6, 4 et 1. Comme l'écrit Pascal, vous aurez alors $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$. À titre d'exemple, Pascal vérifie que la formule donne le bon résultat pour calculer $(1 + 1)^4$ ou $(4 + 1)^4$.

La formule du binôme

Voilà donc exposée devant nous la fameuse formule dite *du binôme de Newton*. De Newton ? Il semble que le bât blesse ici car les travaux du fameux physicien sont postérieurs à ceux du génie français.
On pourrait penser que Pascal ne se soit finalement contenté de développer que les binômes de la forme $(1 + x)^n$ plutôt que $(x + y)^n$, ce qui expliquerait que son nom ne soit pas resté attaché à la formule.
Il n'en est rien : sur la deuxième page de cet *« usage »* complétant le *Traité du triangle arithmétique*, il explique soi-

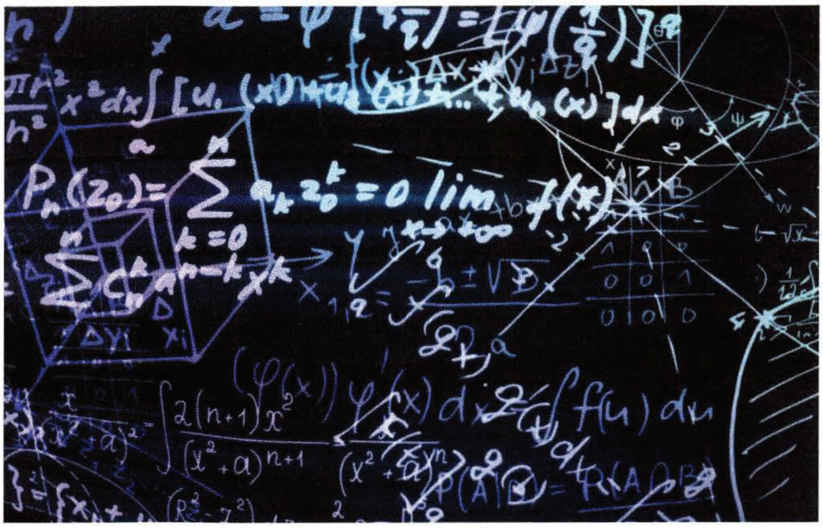
gneusement comment procéder dans un cas plus général.
Partant d'un exemple, il propose de développer $(A + 2)^4$. Il prend modèle sur le développement de $(A + 1)^4$, qui donne $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$.
Il écrit alors les quatre premières puissances de 2 (c'est-à-dire, 2, 4, 8 et 16) sous les coefficients de la cinquième base en laissant le premier de côté (il reste les coefficients 4, 6, 4 et 1).


1 A⁴ † 4 A³ † 6 A² † 4 A † 1
2 4 8 16

Il ne reste plus qu'à *« multiplier les nombres qui se répondent l'un par l'autre »* pour obtenir l'identité désirée : $(A+2)^4 = A^4 + 8A^3 + 24A^2 + 32A + 16$. Pascal détaille les calculs pour montrer à ses lecteurs que la formule produit bel et bien le bon résultat pour $A = 1$ et $A = 2$ et fournit pour dernier exemple le développement de $(A+3)^4$, qui n'est autre que $A^4 + 12A^3 + 54A^2 + 108A + 81$.

Pour les degré supérieurs, Pascal indique : *« Si au lieu du quarré-quarré on veut [...] le cinquième degré, il faut prendre la base sixième et en user comme j'ai dit de la cinquième et ainsi de tous les autres degrés. »*

Peut-être imaginez-vous que Pascal n'avait pas généralisé la formule pour les identités de la forme $(x - y)^n$?
Bien sûr que si ! Il termine d'ailleurs son appendice précisément sur ce sujet. *« La méthode en est toute semblable »* nous dit-il, elle *« ne diffère qu'aux signes, car les signes de + et de – se suivent toujours alternativement, et le signe de + est toujours le premier »*.
En guise d'exemple, il établit les identités $(A - 1)^4 = A^4 - 4A^3 + 6A^2 - 4A + 1$ et $(A - 2)^3 = A^3 - 6A^2 + 12A + 8$.

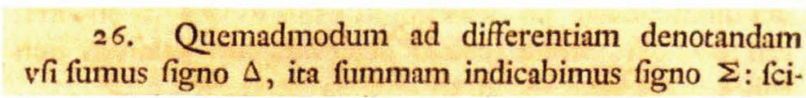


Des postérités souvent délicates

Tout semble bien décrit dans le texte de Pascal, rien n'y manque. Dès lors, pourquoi attribuer cette formule à Newton ? Reconnaissons que Pascal ne donne pas de formule en soi, il écrit dans une prose remarquable d'élégance mais ne formalise pas les choses au point d'écrire

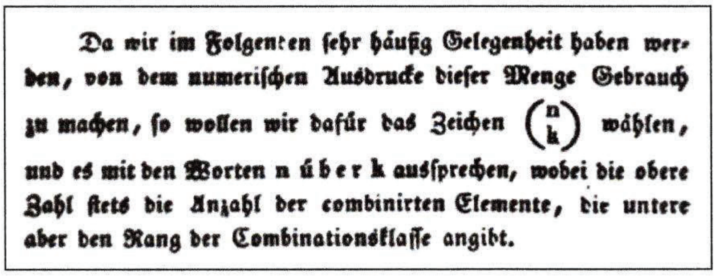
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Mais Newton non plus ne va pas jusque-là. La notation des sommes à l'aide du symbole Σ (« sigma ») est souvent attribuée au mathématicien suisse Leonhard Euler, dans son ouvrage *Institutiones calculi differentialis* rédigé en 1748 et publié en 1755. Il est souvent difficile de dater avec précision l'usage des symboles mathématiques ; certains affirment que ce recours au symbole Σ tel que nous le faisons aujourd'hui est plutôt à chercher du côté de Joseph Fourier, au début des années 1820.


26. Quemadmodum ad differentiam denotandam vſi ſumus ſigno Δ, ita ſummam indicabimus ſigno Σ: ſci-

Extrait de *Institutiones calculi differentialis* de Leonhard Euler. On peut y lire, rédigé en latin : *« Tout comme nous avons utilisé le signe Δ pour désigner la différence, nous désignerons la somme par le signe Σ. »*

Même la notation des coefficients binomiaux est bien postérieure au Grand Siècle ! On la trouve dans *Die Combinatorische Analyse*, un ouvrage de 1826 signé de la plume du mathématicien autrichien Andreas von Ettingshausen, pionnier de la photographie dans son pays.

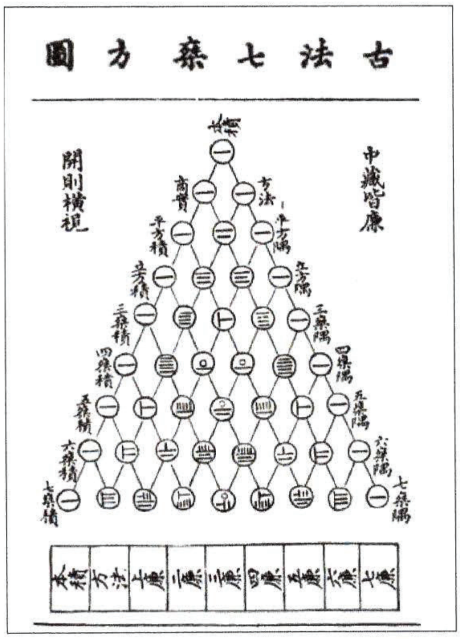

Da wir im Folgenden sehr häufig Gelegenheit haben werden, von dem numerischen Ausdrucke dieser Menge Gebrauch zu machen, so wollen wir dafür das Zeichen $\binom{n}{k}$ wählen, und es mit den Worten n über k aussprechen, wobei die obere Zahl stets die Anzahl der combinirten Elemente, die untere aber den Rang der Combinationsklasse angibt.

Première apparition de la notation du coefficient binomial dans *Die Combinatorische Analyse*, d'Andreas von Ettingshausen (1826).

Mais alors pourquoi le père de la mécanique classique a-t-il laissé son nom à la formule ? Est-ce pour respecter l'adage selon lequel tout objet mathématique porte rarement le nom de celui qui l'a découvert ? Ou un vil coup de la perfide Albion ? Que nenni ! Isaac Newton évoque bien la formule dans ses *Principia mathematica* de 1687. Il énonce le résultat pour… des exposants rationnels ! Cette généralisation de la formule bien connue mérite en effet d'être soulignée ; elle sera démontrée en détail par Leonhard Euler quelques décennies plus tard. Dans ce cas, la somme à considérer est infinie et il faut aussi généraliser la définition des coefficients binomiaux.

Avec des exposants rationnels

Certains diront que la formule proposée par Newton n'est pas vraiment celle à laquelle on pense de prime abord quand on parle du « binôme de Newton ». Finalement, devrions-nous parler de formule du binôme « de Pascal » ou « de Newton » ? Ou distinguer les deux cas, l'une généralisant l'autre ? Pascal lui-même termine son texte sur le sujet en indiquant qu'il *« ne donne pas la démonstration de tout cela, parce que d'autres en ont déjà traité »* et parce que *« la chose est évidente d'elle-même »*. Finalement, cet *« usage »* n'est qu'un court ajout qui permet de faire *a posteriori* le lien entre le *Traité du triangle arithmétique* et le traité sur les sommations des puissances numériques (*Potestatum numericarum summa*). À propos du développement du binôme, Pascal cite le travail de Pierre Hérigone (1580–1643), un acteur incontournable de son époque, correspondant de Marin Mersenne, et à qui on doit l'essor d'un certain symbolisme en mathématique. On pourrait mentionner quelques savants grecs comme Euclide ou Diophante qui, après tout, savaient traiter le cas des puissances 2 et 3. Plusieurs mathématiciens indiens ce sont aussi intéressés aux coefficients binomiaux. À Bagdad, vers l'an 1000, al-Karaji aurait, d'après ses successeurs, développé la formule du binôme jusqu'à l'exposant 12 en expliquant que la méthode peut se poursuivre en utilisant un ancêtre du triangle de Pascal. Quelques temps après, plusieurs mathématiciens chinois tels Jia Xian (vers 1010 – vers 1070) et Yang Hui (1238–1298) semblent maîtriser également le sujet.



Le triangle de Yang Hui et Jia Xian tel que décrit par Zhu Shijie vers 1303.

La généralisation aux exposants rationnels proposée par l'auteur de la théorie de la gravitation universelle aurait aussi été découverte indépendamment par James Gregory, l'un de ses fidèles correspondants. Finalement, pour ne pas faire de jaloux, on pourrait tout simplement parler de « formule du binôme » et retenir que, si Pascal et Newton avaient pu collaborer, ils auraient alors formé… un sacré binôme !

F. A.

La généralisation de Newton

La formule du binôme de Newton pour des exposants qui ne sont pas des entiers naturels s'entend pour une somme infinie. Ainsi, pour tout réel r et tout réel x de l'intervalle $]-1\,;1[$, on a $(1+x)^r = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r}{k} x^k$.

Les coefficients binomiaux demandent à être redéfinis ici de façon plus générale. Il faut comprendre ici $\binom{r}{k} = \dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$.

Dans le cas où r est un entier supérieur ou égal à k, on retrouve bien la formule classique du coefficient binomial, à savoir $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Si l'entier n est strictement inférieur à l'entier k, on trouve $\binom{n}{k} = 0$: la somme de la formule de Newton est alors finie et on retrouve bien le développement évoqué par Pascal à la suite de son *Traité du triangle arithmétique*.

Dans le cas où $r = -1$, on a $\binom{-1}{k} = \dfrac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$.

La formule de Newton conduit alors à des développements bien connus :

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots,$$

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots.$$

Plus amusant peut être, vous pourrez vérifier que la formule donne :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

ou encore :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots$$