

MATHEMATIQUES N°2

Remarque : il est conseillé de soigner la présentation et la rédaction...

Exercice 1 : (10 points) Si les valeurs sont demandées, calculatrice autorisée pour les combinaisons.

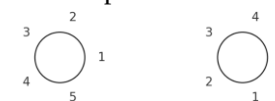
- Un QCM autorisant une seule réponse par question comprend quinze questions. Pour chaque question, cinq réponses sont proposées.
De combien de façons différentes peut-on répondre à ce QCM ? *Calcul seul*
- Lors de la finale du 110 mètres haies, 8 athlètes prennent le départ.
 - Combien de classements sont possibles pour une telle course ? *Calcul + valeur*
 - Combien de podiums (bronze, argent et or) sont possibles ? *Calcul + valeur*
 - Après la course, trois athlètes au hasard subissent un contrôle antidopage : de combien de façon peut-on les sélectionner ? *Calcul + valeur*
- Un groupe de 35 élèves de Terminale doivent constituer un bureau pour diriger leur club de maths. Ce bureau doit comprendre un président, un secrétaire et un trésorier. Combien de bureaux possibles peut-on former ? *Calcul + valeur*
- En 1961, Raymond Queneau a écrit une œuvre composée de 10 pages. Chacune de ces pages est découpée en 14 bandes horizontales, et chacune de ces bandes contient exactement 1 vers.
Le lecteur peut alors composer son propre poème de 14 vers en prenant pour 1^{er} vers celui de l'une des premières bandes de l'une des 10 pages, puis pour 2nd vers celui de l'une des secondes bandes de l'une des 10 pages, et ainsi de suite jusqu'au 14^{ème} vers.
 - Quel est le titre de cette œuvre, sachant qu'il s'agit du nombre de poèmes différents (écrit en toutes lettres) que l'on peut composer ? *Calcul + valeur*
 - Combien d'années faudrait-il pour lire tous les poèmes de cette œuvre, en comptant qu'il faut une minute pour composer et lire un poème ? (on basera les calculs sur des années de 365 jours) *Calcul + valeur*
- On a 8 boules indiscernables au toucher dans un sac : 3 noires N_1, N_2, N_3 , 2 rouges R_1, R_2 et 3 vertes V_1, V_2, V_3 . On tire simultanément trois boules.
 - Combien de tirages possibles existe-t-il ? *Calcul + valeur*
 - Combien de tirages comportant exactement deux boules noires ? *Calcul + valeur*
 - Combien de tirages comportant au moins une boule noire ? *Calcul + valeur*
- Donner le nombre d'anagrammes du mot **ANAGRAMME** *Calcul seul*
- Au poker, on utilise un jeu de 52 cartes réparties en 4 couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle), chaque couleur contenant 13 valeurs (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, As). Une main est composée de 5 cartes données aléatoirement.
 - Combien de mains peut-on former ? *Calcul seul*
 - Combien de mains contenant 5 cartes de la même couleur peut-on former ? *Calcul + valeur*
 - Combien de mains contenant un carré (4 cartes de la même valeur) peut-on former ? *Calcul + valeur*

Exercice 2 : (3,5 points)

Dix amis partent au parc Astérix. Ils disposent pour cela de deux voitures de 5 places.

- On considère qu'il s'agit de deux voitures différentes.
 - De combien de manières peuvent-ils se répartir dans les deux voitures, sachant que tous ont le permis ? (les places ne sont pas prises en compte)
 - De combien de manières peuvent-ils se répartir dans les deux voitures, sachant que deux seulement ont le permis ?
 - S'ils ont tous le permis mais que les places sont prises en compte, de combien de manières peuvent-ils se répartir ?
- On considère qu'il s'agit de voitures parfaitement identiques. De combien de manières peuvent-ils se répartir dans les voitures, sachant que tous ont le permis ?
- Pour le repas du midi, ils s'assoient côte à côte sur un muret. De combien de manières différentes peuvent-ils s'asseoir ?
 - Et s'ils s'assoient en cercle, de combien de manières peuvent-ils s'asseoir ?

(on considère que le sens de rotation n'importe pas : avec 5 personnes, les configurations ci-contre sont identiques)



Exercice 3 : (2 points)

Voici le tableau de variations de f :

- Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet trois asymptotes et donner leurs équations.
- Tracer dans un repère l'allure de $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

x	-4	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-2	$+\infty$ ↗	$+\infty$ ↘ 2

Exercice 4 : (1,5 points)

Soit f la fonction définie sur $[2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3 - 2\sqrt{x}}{5x - 7}$.

Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale dont on donnera l'équation.

Exercice 5 : (3 points)

Soit n un entier naturel non nul.

- D'après la formule du triangle de Pascal, réduire $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}$.
- Résoudre $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$

Bonus : (+1,5 points)

- De quel mathématicien parle finalement essentiellement l'article à lire ?
- A quel siècle a-t-il vécu ?
- Développer $(A + 1)^5$ et $(A - 1)^5$
- Pourquoi attribue-t-on la formule du binôme à Newton alors qu'il ne fut pas le premier à l'établir ?
- L'article se termine par un jeu de mot hi-la-rant, indiquant que si ces deux mathématiciens « avaient pu collaborer, ils auraient alors... ». Compléter.

Corrigé

MATHEMATIQUES N°2

Exercice 1 : (10 points)

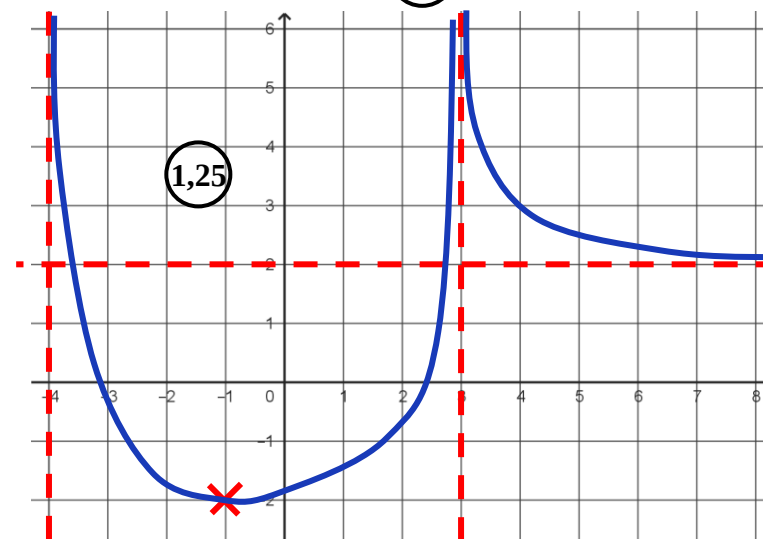
1. Il y a 5^{15} façons de répondre à ce QCM. (0,5)
2. a. Il existe $8!$ classements, soit 40 320. (0,5)
b. Il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles. (0,5)
c. Il existe $\binom{8}{3} = 56$ façons de procéder au contrôle antidopage de 3 athlètes. (0,5)
3. $35 \times 34 \times 33 = 39\,270$ bureaux sont possibles. (0,5)
4. a. Il existe 10^{14} poèmes différents, soit 100 000 000 000 000 poèmes. (1)
Le titre de l'œuvre est donc « cent mille milliards de poèmes ».
b. Une année, c'est $365 \times 24 \times 60 = 525\,600$ minutes
Et $100\,000\,000\,000\,000 : 525\,600 \approx 190\,258\,752$
Il faudrait donc 190 258 752 années pour lire tous ces poèmes ! (0,75)
5. a. Il existe $\binom{8}{3} = 56$ tirages possibles. (0,5)
b. Il faut donc prendre 2 boules noires parmi 3, puis la troisième boule parmi les 5 boules non noires.
 $\binom{3}{2} \times \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$ (1)
c. Le plus simple est de compter les tirages sans boules noires : $\binom{5}{3} = 10$
Et on fait ensuite une soustraction : $56 - 10 = 46$ (1)
Autre solution : tirages avec exactement une boule noire + tirages avec 2 boules noires + tirages avec 3 boules noires
 $\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} + \binom{3}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{3}{3} \times \binom{5}{0} = 3 \times 10 + 3 \times 5 + 1 \times 1 = 46$
6. On dénombre $\frac{9!}{3!2!}$ anagrammes (ou $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \binom{5}{3} \binom{2}{2}$) (0,75)
7. a. On peut former $\binom{52}{5}$ mains. (0,5)
b. Il y en a $\binom{4}{1} \times \binom{13}{5} = 4 \times 1\,287 = 5\,148$ (1)
c. On en compte $\binom{13}{1} \times \binom{4}{4} \times \binom{48}{1} = 13 \times 1 \times 48 = 624$ (1)

Exercice 2 : (3,5 points)

1. a. Ils peuvent se répartir de $\binom{10}{5} \times \binom{5}{5} = 252$ manières. (0,5)
b. Si seulement deux d'entre eux ont le permis, cela donne $\binom{8}{4} = 70$ possibilités. (0,5)
c. Cela fait $\binom{10}{5} \times 5! \times \binom{5}{5} \times 5! = 3\,628\,800$ possibilités. (0,75)
2. Avec deux voitures identiques, il suffit de diviser par deux ce qui donne 126 possibilités. (0,5)
3. a. Ils peuvent-ils s'asseoir de $10!$ façons. (0,5)
b. En cercle, chaque façon précédente de s'asseoir se décline en 10 rotations identiques. Et chaque rotation existe dans les deux sens.
Il existe donc $\frac{10!}{10 \times 2}$ façons. (0,75)

Exercice 3 : (2 points)

1. On a deux asymptotes verticales d'équation $x = -4$ et d'équation $x = 3$, et une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ (0,75)



Exercice 4 : (1,5 points)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3 - 2\sqrt{x}}{5x - 7} \\
 &= \frac{\sqrt{x} \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - 2 \right)}{x \left(5 - \frac{7}{x} \right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\frac{3}{\sqrt{x}} - 2}{5 - \frac{7}{x}}
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \times \frac{-2}{5} = 0$ (1)

Par conséquent, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$. (0,5)

Exercice 5 : (3 points)

1. $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \binom{n+2}{3}$ (0,25)

2. $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$

$$\binom{n+2}{3} = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$$

$$\frac{(n+2)!}{(n+2-3)!3!} = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6} = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$$

$$(n+2)(n+1)n = 10n^2 - 8n$$
 (1,5)

$$(n+2)(n+1) = 10n - 8 \quad \text{car } n \neq 0$$
 (0,25)

On arrive donc à $n^2 + n + 2n + 2 = 10n - 8$

$$n^2 + 3n + 2 - 10n + 8 = 0$$

$$n^2 - 7n + 10 = 0$$
 (0,5)

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10$$

$$= 49 - 40$$

$$= 9$$

$$n_1 = \frac{7-3}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{7+3}{2 \times 1} = 5$$
 (0,5)

Bonus :

1. Blaise Pascal (0,25)

2. XVIIème (0,25)

3. $(A+1)^5 = A^5 + 5A^4 + 10A^3 + 10A^2 + 5A + 1$ (0,25)

$$(A-1)^5 = A^5 - 5A^4 + 10A^3 - 10A^2 + 5A - 1$$
 (0,25)

4. Parce qu'il l'a généralisée aux exposants rationnels (0,25)

5. « formé un sacré binôme ! » (MDR) (0,25)