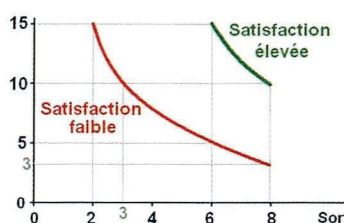


Vie courante 1

Des fonctions qui ont... une fonction

Il y avait déjà la fonction « de retouche », rencontrée dans les pages précédentes, il y a aussi d'autres fonctions traduisant une vraie action ou décrivant une qualité bien précise. C'est le cas de cette « *fonction d'indifférence* » que l'on utilise en théorie de la décision. Imaginons que vous puissiez acheter deux biens, par exemple des tickets de cinéma ou des billets de théâtre. L'utilisation de huit tickets de cinéma et trois billets de théâtre vous procure la même satisfaction que quinze billets de théâtre et deux tickets de cinéma. Cette idée d'égale satisfaction



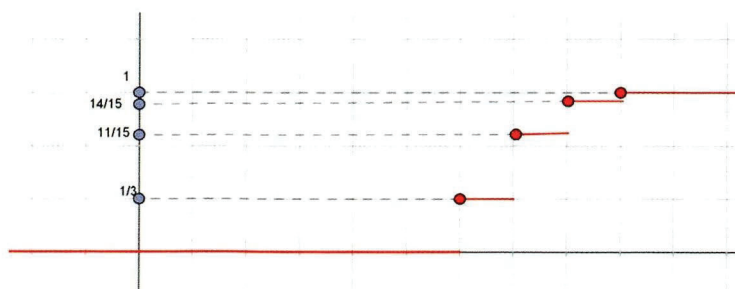
(*iso-utilité*, disent les économistes) permet de définir une *fonction d'utilité* f des deux variables x et y : $f(x, y)$ = degré de satisfaction pour l'achat de x tickets de cinéma et y billets de théâtre et, de manière implicite, une *fonction d'indifférence*, et le tracé de sa courbe représentative par $f(x, y) = \text{constant}$. Le consommateur est indifférent au choix de tel ou tel couple (abscisse, ordonnée) de cette courbe et chaque courbe d'indifférence correspond à son niveau de satisfaction.

C'est aussi le cas de ce que l'on appelle une « *fonction de répartition* », utilisée en probabilités. Imaginons que, dans le vestiaire d'un grand théâtre, dix personnes aient confié à Alice, l'employée, leurs manteaux, laissant dans les poches leur porte-monnaie. L'un contient 50 €, trois autres 40 € et six autres 30 €. Alice, quelque peu indélicate, subtilise au hasard deux porte-monnaie dans les poches de ces vêtements. Considérons alors deux fonctions, l'une, notée X , qui à chaque éventualité de vol associe la somme totale dérobée, qui va varier entre 60 et 90, l'autre, F , qui à tout réel x associe la probabilité que X soit inférieur ou égal à x . Ainsi, $F(x) = P(X \leq x)$. On construira sa courbe représentative à partir de ce tableau de valeurs : par exemple, $X = 80$ correspond à deux vols à 40 € ou un à 30 et un à 50, de probabilité égale à

$$\frac{\binom{3}{2} + 1 \times 6}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}.$$

où $\binom{3}{2}$ désigne le nombre de choix possibles de deux porte-monnaie à 40 € parmi trois.

Voici la représentation de cette fonction en escaliers.



Vie courante 2

Indices des prix et CAC 40 sont des fonctions !

Les expressions « être fonction de » et « en fonction de » marquent un lien de dépendance. Cette acception, qui rapproche de la définition mathématique, conduit à l'utilisation quotidienne de fonctions. Elles se cachent sous forme d'indices les plus divers, permettant de corréler des facteurs significatifs :

- Indice de masse corporelle (voir ci-dessous) : l'IMC est une grandeur qui permet d'estimer la corpulence d'une personne en fonction de sa masse m (en kg) et de sa taille t (en m) : $IMC = m/t^2$.

moins de 16,5	Dénutrition
16,5 à 18,5	Maigre
18,5 à 25	Corpulence normale
25 à 30	Surpoids
30 à 35	Obésité modérée
35 à 40	Obésité sévère
plus de 40	Obésité morbide ou massive

- Parlons finance : le prix d'un objet exprimé dans une certaine monnaie est, en principe (hors prélèvement d'une commission), une fonction « linéaire » de ce même prix, exprimé dans une autre monnaie. Le rapport de proportionnalité a alors pour nom... le taux de change ! Mais certaines fonctions financières sont moins simples. Il en est ainsi de la formule qui permet d'établir la somme remboursée S à l'issue d'un emprunt en fonction de du nombre n d'années de remboursement, de l'annuité A et du taux d'intérêt i :

$$S = \frac{A}{(1+i)^n} + \dots + \frac{A}{(1+i)^k} + \dots + \frac{A}{1+i}.$$

- GPS : le Global Positioning System possède de nombreuses fonctions liées à des algorithmes sophistiqués, allant au-delà de la simple recherche d'itinéraire : l'utilisateur peut choisir, même en cours de route, d'éviter les péages, de contourner un accident ou une rue en travaux, d'aller au plus vite ou au plus court.
- Indice des prix à la consommation : l'IPC est, entre autres, l'instrument de mesure de l'inflation. Il permet d'estimer, entre deux périodes données, la variation du niveau général des prix des services et des biens consommés par les ménages sur le territoire français. C'est une mesure synthétique des évolutions de prix à qualité constante. La nomenclature utilisée, qui permet des comparaisons internationales, comprend douze fonctions de consommation, quatre-vingt-six regroupements, cent soixante et un groupes...
- CAC 40 : cet indice est calculé à partir des cours des quarante actions les plus liquides et les plus capitalisées. Historiquement, le CAC désignait la Compagnie des agents de change. Depuis 1988, le CAC 40 est calculé en continu en fonction de l'évolution des cours des actions des sociétés qui le composent en prenant en compte la pondération relative à chacune d'entre elles. Il est actualisé toutes les quinze secondes.

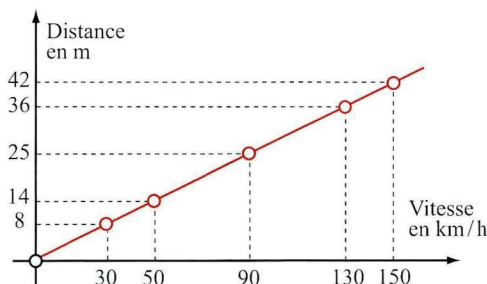
Vie courante 3

Temps de réaction et distance de freinage

Vous roulez à une certaine vitesse (constante) v , quand un obstacle imprévu apparaît sur votre route. Il va vous falloir :

- vous en rendre compte, ce qui demande un certain temps de réaction,
- freiner, ce qui n'est pas immédiat.

Essayons d'en savoir plus sur la fonction qui, à chaque vitesse, associe le temps $t = f(v)$ précédant l'arrêt de votre voiture.



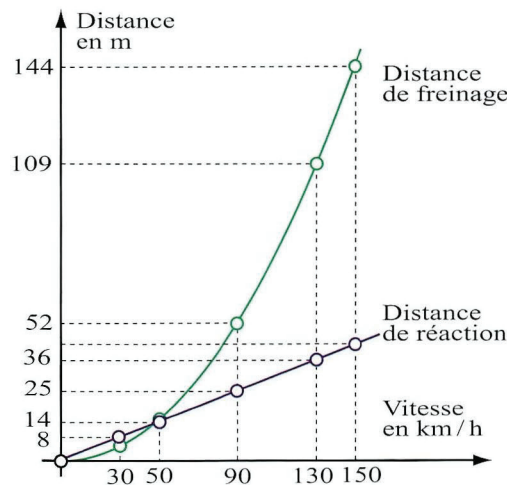
Distance de réaction en fonction de la vitesse du véhicule. Le graphique en ligne droite traduit une relation de proportionnalité entre la distance et la vitesse. On parle de *dépendance linéaire* entre ces deux variables.

- Le temps de réaction du cerveau à un imprévu est normalement d'une seconde. Quand vous conduisez, avant que vous commenciez à freiner, votre voiture va parcourir une distance fonction de sa vitesse. Pour une vitesse de 60 km/h, une heure comptant soixante minutes, la voiture parcourt 1 km en une minute. En une seconde, elle en parcourt donc $1000/60 = 17$ m, avant que la décélération ne puisse commencer. À 30 km/h, il faudra la moitié du temps, soit 8 m environ ; à 50 km/h, vitesse autorisée en ville, on trouve 14 m.

Lorsqu'on anticipe, par exemple en tenant compte d'une signalisation qui annonce un obstacle, le temps de réaction est alors divisé par 2. Au contraire, manquer de vigilance, comme téléphoner au volant,

va doubler ce temps. Il faudra alors 28 m pour commencer à freiner en ville, largement le temps d'écraser un piéton.

- La distance de freinage, elle, est très influencée par la vitesse. L'énergie acquise par un corps est proportionnelle à sa masse et au carré de sa vitesse. Elle doit être absorbée au cours du freinage pour que le véhicule s'arrête, ce qui explique que la distance de freinage soit proportionnelle au carré de la vitesse. Ainsi, si on double la vitesse, on quadruple la distance de freinage ! Par temps sec, à 50 km/h, la distance de freinage est de 16 m. À 100 km/h, elle sera donc de $4 \times 16 = 64$ m !



Distances de réaction et de freinage en fonction de la vitesse du véhicule par temps sec. La première dépendance est linéaire, la seconde, quadratique.

Le graphique ci-dessus illustre que la distance de freinage est largement prépondérante aux vitesses de route. En ville, c'est le contraire : le temps de réaction joue plus. La vigilance y est primordiale. On observe aussi l'évolution vertigineuse de la distance de freinage en fonction de la vitesse. La courbe reliant ces deux variables est une parabole.