

MATHEMATIQUES N°1

Remarque : un 1^{er} contrôle classique, dont le coefficient ne sera peut-être pas aussi important que les suivants. Attention à bien soigner la rédaction !

Exercice 1 : (3,5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_1 = 120 \\ u_{n+1} = 1,14u_n - 7 \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$
Démontrer que $u_n = 70 \times 1,14^{n-1} + 50$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 : (3,5 points)

Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 9}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq 5$.

Exercice 3 : (4 points)

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n k(2k+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

On rappelle que $\sum_{k=1}^n k(2k+1) = 1(2 \times 1 + 1) + 2(2 \times 2 + 1) + \dots + n(2 \times n + 1)$

Exercice 4 : (4 points)

1. En introduisant une suite judicieusement choisie et en expliquant de manière claire et détaillée la démarche, calculer la somme suivante :

$$S = 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + \dots + 2\,930$$

2. Même question pour $S' = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots + \frac{1}{16\,384}$

On donnera la réponse sous forme de fraction irréductible, en détaillant les calculs.

Exercice 5 : (5 points)2023

- Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 4 + 5n - 2n^2$
- Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{8-3n}{5n^2-4n+7}$

Bonus : (+1,75 points)

- L'article à lire était extrait d'un Hors-Série du magazine Tangente qui avait pour thème deux outils géométriques élémentaires : le compas et ... ?
- A quelle histoire de la mythologie grecque l'inventeur Dédale est-il associé ?
- Lorsque les deux extrémités de ses branches sont des pointes, comment est qualifié un compas ?
- A qui doit-on l'expression « le compas dans l'œil » ?
- Dans le premier contrôle de Terminale de l'année dernière, la remarque initiale indiquait d'écrire un mot étrange en début de copie : lequel ?
- Compléter la définition de « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ » : $\forall \dots$

MATHEMATIQUES N°1

Remarque : un 1^{er} contrôle classique, dont le coefficient ne sera peut-être pas aussi important que les suivants. Attention à bien soigner la rédaction !

Exercice 1 : (3,5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_1 = 120 \\ u_{n+1} = 1,14u_n - 7 \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$
Démontrer que $u_n = 70 \times 1,14^{n-1} + 50$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 : (3,5 points)

Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 9}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq 5$.

Exercice 3 : (4 points)

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n k(2k+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

On rappelle que $\sum_{k=1}^n k(2k+1) = 1(2 \times 1 + 1) + 2(2 \times 2 + 1) + \dots + n(2 \times n + 1)$

Exercice 4 : (4 points)

1. En introduisant une suite judicieusement choisie et en expliquant de manière claire et détaillée la démarche, calculer la somme suivante :

$$S = 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + \dots + 2\,930$$

2. Même question pour $S' = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots + \frac{1}{16\,384}$

On donnera la réponse sous forme de fraction irréductible, en détaillant les calculs.

Exercice 5 : (5 points)2023

- Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 4 + 5n - 2n^2$
- Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{8-3n}{5n^2-4n+7}$

Bonus : (+1,75 points)

- L'article à lire était extrait d'un Hors-Série du magazine Tangente qui avait pour thème deux outils géométriques élémentaires : le compas et ... ?
- A quelle histoire de la mythologie grecque l'inventeur Dédale est-il associé ?
- Lorsque les deux extrémités de ses branches sont des pointes, comment est qualifié un compas ?
- A qui doit-on l'expression « le compas dans l'œil » ?
- Dans le premier contrôle de Terminale de l'année dernière, la remarque initiale indiquait d'écrire un mot étrange en début de copie : lequel ?
- Compléter la définition de « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ » : $\forall \dots$

MATHEMATIQUES N°1

Exercice 1 : (3,5 points)

Initialisation : $n = 1$

$u_1 = 120$ et $70 \times 1,14^{1-1} + 50 = 70 \times 1 + 50 = 120$: c'est vérifié. (0,75)

Hérédité : Supposons que $u_n = 70 \times 1,14^{n-1} + 50$ pour un certain rang n . (0,75)

Montrons que $u_{n+1} = 70 \times 1,14^n + 50$

On a $u_{n+1} = 1,14u_n - 7$

$$= 1,14(70 \times 1,14^{n-1} + 50) - 7 \quad \text{par HR}$$

$$= 70 \times 1,14^n + 57 - 7$$

$$= 70 \times 1,14^n + 50$$

Par récurrence, on a donc $70 \times 1,14^{n-1} + 50$ pour tout $n \geq 1$. (2)

Exercice 2 : (3,5 points)

Initialisation : $n = 0$

$v_0 = 1 \leq 5$: la propriété est vérifiée. (0,75)

Hérédité : Supposons que $v_n \leq 5$ pour un certain rang n . (0,75)

Montrons que $v_{n+1} \leq 5$.

On a $v_n \leq 5$ par HR

$$3v_n \leq 3 \times 5$$

$$3v_n + 9 \leq 15 + 9$$

$$\sqrt{3v_n + 9} \leq \sqrt{24} \quad \text{car } \sqrt{\cdot} \text{ est une fonction croissante (0,25)}$$

$$v_{n+1} \leq \sqrt{24} \leq 5$$

Par récurrence, on a donc $v_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (2)

Exercice 3 : (4 points)

Initialisation : $n = 1$

On a $\sum_{k=1}^1 k(2k+1) = 1(2 \times 1 + 1) = 3$ et $\frac{1(1+1)(4 \times 1 + 5)}{6} = \frac{2 \times 9}{6} = 3$

La propriété est vérifiée pour $n = 1$. (0,75)

Hérédité : Supposons que $\sum_{k=1}^n k(2k+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$ pour un certain n .

Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k(2k+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)(4(n+1)+5)}{6}$.

$$= \frac{(n+1)(n+2)(4n+9)}{6}. \quad (0,75)$$

On a $\sum_{k=1}^{n+1} k(2k+1) = \underbrace{1(2 \times 1 + 1) + \dots + n(2 \times n + 1)}_{\sum_{k=1}^n k(2k+1)} + (n+1)(2(n+1)+1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+1)(4n+5)}{6} + (n+1)(2n+3) \quad \text{par HR} \\ &= \frac{(n+1)(n(4n+5) + 6(2n+3))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(4n^2 + 5n + 12n + 18)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(4n^2 + 17n + 18)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } (n+2)(4n+9) &= 4n^2 + 9n + 8n + 18 \\ &= 4n^2 + 17n + 18 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{n+1} k(2k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(4n+9)}{6}$$

Par récurrence, on a donc $\sum_{k=1}^n k(2k+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2,5)$

Exercice 4 : (4 points)

1. On remarque que la progression est arithmétique de raison 4.

On introduit la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_{n+1} = u_n + 4$ et $u_0 = 2$.

On a alors $u_n = 2 + 4n$ (0,5)

$$2\,930 = 2 + 4n$$

$$2\,930 - 2 = 4n$$

$$n = \frac{2\,928}{4} = 732 \quad (0,75)$$

Ainsi, $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{732}$

$$= 733 \times \frac{2 + 2\,930}{2}$$

$$= 1\,074\,578 \quad (0,75)$$

2. On remarque que la progression est géométrique de raison $\frac{-1}{2}$

On a alors $u_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

On introduit la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_{n+1} = \frac{-1}{2}u_n$ et $u_0 = 1$ (0,5)

La calculatrice permet d'obtenir $\frac{1}{16\,384} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{14} = u_{14}$ (0,25)

Ainsi, $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{14}$

$$= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{15}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{32\,768}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{32\,769}{32\,768}}{\frac{3}{2}} = \frac{32\,769}{32\,768} \times \frac{2}{3} = \frac{10\,923}{16\,384} \quad (1,25)$$

Exercice 5 : (5 points)

1. $u_n = 4 + 5n - 2n^2$

$$= n^2 \left(\frac{4}{n^2} + \frac{5}{n} - 2 \right)$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n} - 2 = -2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ (1,5)

2. $v_n = \frac{8 - 3n}{5n^2 - 4n + 7}$

$$= \frac{n \left(\frac{8}{n} - 3 \right)}{n^2 \left(5 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2} \right)}$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{\frac{8}{n} - 3}{5 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{8}{n} - 3}{5 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{-3}{5}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (3,5)

Bonus : (+1,75 points)

1. La règle (graduée) (+0,25)

2. Le minotaure (+0,25)

3. A pointes sèches. (+0,25)

4. Michel-Ange (+0,25)

5. Hippopotame (+0,25)

6. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - 4| < \varepsilon$ (+0,5)