

INTÉGRATION #2

1 Vérifier que $I = \int_1^2 x^2 \ln(x) dx = \frac{8}{3} \ln(2) - \frac{7}{9}$.

2 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-2}^3 (x+1)e^x dx \quad J = \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx \quad L = \int_0^{\pi} (x+1) \sin(x) dx$$

$$M = \int_0^{\pi} t \sin(2t) dt \quad N = \int_{-1}^2 (3t+1)e^{-t} dt$$

3 On pose $I = \int_1^9 x\sqrt{x} dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = 121 - I$.
2. En déduire la valeur de I .

4 On définit les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx$$

1. Montrer que $J = 1 + I$ et $I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$.
2. En déduire I et J .

5 1. a. Démontrer que, pour tout réel x , on a :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

b. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

6 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Calculer I_0 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
3. En déduire I_1, I_2 et I_3 .

7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{nx^2}$. Soit alors (I_n) la suite définie par $I_n = \int_1^2 f_n(x) dx$.

On a tracé ci-contre les courbes représentatives $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ des fonctions f_1, f_2 et f_3 .

1. a. Faire une conjecture sur le sens de variation de (I_n) .
b. La démontrer...
2. a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq e^n$.
b. En déduire la limite de la suite (I_n) .

8 Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

1. Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ sur $[n; n+1]$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.
3. En déduire la limite de la suite (I_n) .
4. Retrouver le résultat précédent en calculant explicitement I_n .

9 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_e^{2e} (\ln x)^n dx$$

1. Justifier que la suite (I_n) est décroissante.
2. Quel est le sens de variation de la suite (J_n) ? Justifier.

10 Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1. Calculer u_0 .
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$$

b. En déduire la valeur exacte de u_1 .
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

11 Soit (I_n) et (J_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$$

1. a. Justifier que $\forall x \in [0; 1], \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.
b. Montrer que la suite (I_n) est majorée par 1.
2. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
b. En déduire la limite de la suite (J_n) .
3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n + J_n$.
b. Déterminer la limite de la suite (I_n) .

12 On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos(t) dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin(t) dt$$

1. a. Justifier que (x_n) est à termes positifs.
b. Étudier le sens de variation de la suite (x_n) .
c. En déduire que la suite (x_n) converge.
2. a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq \frac{1}{n+1}$.
b. En déduire la limite de la suite (x_n) .
3. a. À l'aide d'une IPP, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
b. En déduire la limite de la suite (y_n) .

13 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère d'unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 6 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variation de f .
2. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
4. On note $\mathcal{S}$ la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
Calculer l'aire $\mathcal{S}$, en unités d'aire puis en cm^2 .

14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. a. Montrer que $f(x) = (x^2 - 4)(x - 5)$.
b. Étudier le signe de $f(x)$ en fonction de x .
2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.
3. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 5$.

15 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$

1. a. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $[1; +\infty[$.
b. Donner une interprétation géométrique du réel $g(3)$.
2. a. À l'aide d'une IPP, montrer que :
$$g(x) = 1 - \frac{\ln(x) + 1}{x}$$

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

16 On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (x + 2)e^{-nx}$ où n est un entier naturel non nul. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

1. a. Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
b. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ puis construire son tableau de variations.
3. Déterminer le signe de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. Construire la courbe $\mathcal{C}_1$.
5. On note $\mathcal{S}_1$, la surface délimitée par $\mathcal{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer une valeur exacte puis arrondie à 10^{-3} de l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{S}_1$.
6. Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

a. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x + 2)e^{-nx}(e^{-x} - 1) dx$$

- b. En déduire le sens de variation de (I_n) .
- c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{3}{n}(1 - e^{-n})$
- d. En déduire que la suite (I_n) converge.

17 Pour tout entier naturel n , on pose :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$\text{Vérifier que } J_{n+1} = \frac{n}{n+1} J_{n-1}$$

18 Pour tout entier naturel n , on pose :

$$K_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$$

$$\text{Vérifier que } 2K_{n+1} + (n+1)K_n = e^2$$

19 Pour tout entier naturel n , on pose :

$$L_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$$

$$\text{Vérifier que } L_{n+1} = -e^{-1} - (n+1)L_n$$

20 Pour chaque question, déterminer la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle I donné.

$$f(x) = -3x^2 + 5x - 1, I = [0; 1]$$

$$g(x) = e^{2-x}, I = [0; 4]$$

$$h(x) = 4(3x - 3)^3, I = [-1; 0]$$

$$i(x) = \frac{5x^2}{2x^3 + 1}, I = [0; 1]$$

$$j(x) = \frac{1}{x} \ln(x), I = [1; e^2]$$

$$k(x) = \cos(3x), I = [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$l(x) = \cos(x) \sin^2(x), I = [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$$

$$m(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}}, I = [-1; 2]$$

21 Soit f et g les fonctions définies $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \text{ et } g(x) = x^2 + 3x - 4$$

1. a. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la position relative des courbes représentatives de ces deux fonctions.
b. Démontrer cette conjecture.
2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

22 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
2. Justifier que $\mathcal{T}$ est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0; +\infty[$.
3. À l'aide d'une IPP, déterminer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par $\mathcal{C}$, $\mathcal{T}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

23 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et d la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à d .
2. Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 1$. On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, la droite d et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
a. Écrire $\mathcal{A}(\alpha)$ à l'aide d'une intégrale.
b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$.
c. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.