

LOI DES GRANDS NOMBRES

1 Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu = 1$ et de variance $V(X) = 0,2$.

Justifier que $p(|X - 1| \geq 0,5) \leq 0,8$.

2 Une usine fabrique des tubes dont l'épaisseur en millimètres définit une variable aléatoire X d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07.

1. Justifier que $p(|X - 1,5| \geq 0,15) \leq 0,22$.

2. En déduire que $p(1,35 < X < 1,65) > 0,78$.

3 Une épreuve consiste à tirer au hasard dix jetons avec remise dans un sac contenant 40 % de jetons bleus. On appelle X la variable aléatoire qui, à cette série de tirages, associe le nombre de jetons bleus obtenus.

1. a. Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.

b. Déterminer son espérance.

c. Montrer que sa variance est 0,24.

2. Montrer que $p(|X - 4| \geq 2) \leq 0,6$.

3. Montrer que $p(|X - 4| < 2) \geq 0,4$.

4 On appelle X la variable aléatoire qui, sur le créneau horaire 14h-15h, associe le nombre d'avions atterrissant sur un aéroport. On estime que $E(X) = 16$ et $V(X) = 16$.

1. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable X .

2. Déterminer une minoration de la probabilité qu'il arrive entre 12 et 20 avions sur cet aéroport entre 14h et 15h.

5 Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ .

1. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable X .

2. Déterminer les valeurs du réel positif σ de façon que $p(|X - \mu| < 15) \geq 0,96$.

6 Le nombre de matelas en laine fabriqués en un mois par une entreprise d'Ardèche définit une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.

1. a. Justifier que $p(X \geq 75) \leq p(|X - 50| \geq 25)$.

b. Majorer la probabilité que la production du mois à venir dépasse 75 matelas.

2. Minorer la probabilité que la production du mois à venir soit strictement comprise entre 40 et 60 matelas.

7 Un avion peut transporter 100 passagers et leurs bagages. Sans les passagers, ni les bagages, mais avec l'équipage et le carburant, il pèse 120 tonnes. Les consignes de sécurité interdisent le décollage si le poids de l'appareil dépasse 129,42 tonnes. Les 100 places ont été occupées.

Le poids d'un voyageur suit une loi d'espérance 70 kg et d'écart-type 10 kg. Le poids de ses bagages suit une loi d'espérance 20 kg et d'écart-type 10 kg. Ces variables sont supposées indépendantes.

1. a. Calculer l'espérance du poids de l'avion au décollage.

b. L'espérance calculée est-elle conforme aux normes de sécurité ?

2. Calculer l'écart-type du poids total de l'appareil.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver un majorant de la probabilité pour que le poids réel de l'appareil au décollage dépasse 129,42 tonnes.

8 Soit la variable aléatoire T qui, à chaque enfant français âgé d'un an, associe sa taille en cm. Des statistiques permettent d'estimer que cette variable a pour espérance 50 et pour écart-type 2.

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de T de taille 10 000.

2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer la probabilité que cette taille moyenne s'écarte de 50 cm de plus de 0,1 cm.

9 On définit le sex-ratio d'une population à la naissance comme le rapport du nombre de naissances de garçons sur le nombre de naissances de filles. En 2019, il était de 1,05 pour la population mondiale et de 1,13 pour la Chine.

1. Montrer que la proportion p_m de naissances féminines pour la population mondiale est 0,488 à 10^{-3} près, et que cette proportion p_c pour la Chine est 0,469 à 10^{-3} près.

2. Soit la variable aléatoire X qui, à un groupe de 1,3 milliard d'êtres humains (population de la Chine), associe le nombre de femmes de ce groupe.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et en préciser ses paramètres.

b. On définit $F = \frac{1}{1,3 \times 10^9} X$

Que représente cette variable aléatoire F ?

c. Déterminer l'espérance et la variance de F .

3. a. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de la probabilité $p(|X - p_m| \geq 10^{-2})$.

b. En considérant la proportion de naissances féminines p_c de la Chine comme une réalisation de la variable aléatoire F , majorer la probabilité qu'elle se produise.

c. Que peut-on en penser ?

10 On lance n fois un dé équilibré à six faces et on note X la variable aléatoire qui, à un lancer donné, associe 1 si la face 1 sort, et 0 sinon.

On note M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X .

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$, et écrire l'inégalité de concentration relative à la variable M_n .

2. Combien suffit-il d'effectuer de lancers pour que la fréquence de sortie de la face 1 s'écarte de plus de $\frac{1}{100}$ de la valeur $\frac{1}{6}$ avec une probabilité inférieure ou égale à 0,95 ?

11 Soit M_n , la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X . On suppose que $E(X) = 10$ et $\sigma_X = 1$.

1. Montrer que $p(|M_n - 10| \geq 1) \leq \frac{1}{n}$.
2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles on a $p(|M_n - 10| \geq 1) \leq 0,01$.

12 On lance n fois une pièce équilibrée et l'on désigne par F_n la variable aléatoire qui, à ces n lancers, associe la fréquence de « Pile » obtenus. Déterminer un entier n tel que la probabilité $p(0,48 < F_n < 0,52)$ soit au moins égale à 0,95.

13 Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance 40 et de variance 10. Déterminer la taille minimale de l'échantillon pour que $p(|M_n - 40| < 2) \geq 0,5$.

14 Dans une entreprise, l'étude d'un dossier comporte deux volets : le temps, en heures, consacré à l'étude financière d'un dossier suit une loi de probabilité d'espérance 5 et d'écart-type 2, et celui consacré à l'étude administrative suit une loi d'espérance 3 et d'écart-type 1. On note X la variable aléatoire égale au temps total consacré à l'étude d'un dossier. On admet que les temps d'étude sont indépendants.

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X .
2. Soit T la variable aléatoire qui, à un échantillon aléatoire de 100 dossiers de l'entreprise, associe le temps passé à étudier l'ensemble de ces dossiers. Déterminer l'espérance et la variance de T .
3. a. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable aléatoire T .
b. Montrer que la probabilité que le temps d'étude de cet échantillon de dossiers soit compris entre 700 et 900 heures est d'au moins 95 %.

15 Dans une population donnée, on note p la proportion de personnes en accord avec un projet de loi. Cette proportion p est inconnue, mais on sait qu'elle se situe dans l'intervalle $[0,2 : 0,8]$. Pour chaque personne tirée au hasard dans cette population, on définit la variable aléatoire A valant 1 si cette personne est d'accord avec le projet de loi, et 0 sinon. On suppose que les réponses des personnes sont toutes indépendantes entre elles.

1. Pour tout entier naturel n non nul, soit S_n la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille n de la loi de A .
 - a. Quelle est la loi de S_n ?
 - b. En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$ puis l'espérance et la variance de $F_n = \frac{S_n}{n}$, variable aléatoire donnant la fréquence des personnes disant « oui au projet de loi » dans un échantillon de taille n .
2. Soit δ un nombre réel. Donner une minoration de $p(|F_n - p| < \delta)$ en fonction de n , p et δ .
3. a. En utilisant les variations de la fonction $p(1 - p)$, montrer que $p(1 - p) \geq 0,16$.
b. Donner une valeur de l'entier n telle que :
$$p(|F_n - p| < 0,1) > 0,95$$
4. On effectue un sondage sur un échantillon de 350 personnes et on obtient une fréquence de « oui » de 0,6. Si on se base sur cet échantillon pour en déduire que, dans cette population, une majorité est en faveur du projet de loi, quel est le risque d'erreur que l'on prend ?

16 Hugo et Léa jouent à pile ou face avec une pièce truquée. La probabilité d'obtenir « Pile » est 0,49. On gagne un euro quand on obtient « Pile » et on perd un euro dans le cas contraire. Ils jouent n fois consécutivement à ce jeu. Soit X la variable aléatoire qui, à n lancers, associe le gain de Hugo. Montrer qu'il existe un entier n tel que la probabilité $p(X > 0)$ soit inférieure à 0,01.