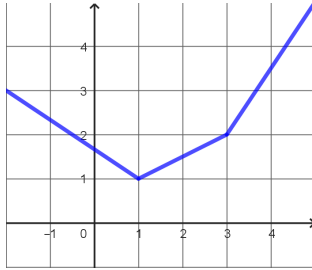


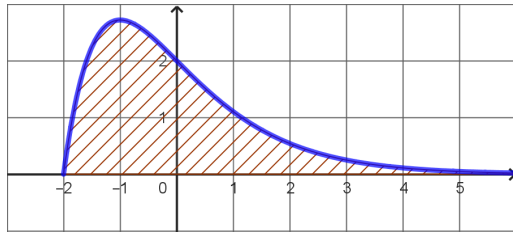
INTÉGRATION #1

1 On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-2; 5]$. Par lecture graphique, déterminer les intégrales suivantes :



1. $\int_{-2}^1 g(x) dx$ 2. $\int_1^3 g(x) dx$ 3. $\int_{-2}^5 g(x) dx$

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-dessous :



- A l'aide d'une intégrale notée I , exprimer l'aire de la surface hachurée en unités d'aire.
- Estimer à l'unité près la valeur de $\int_0^1 f(x) dx$.
- Encadrer I par deux nombres entiers.

3 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^2 (-3x + 5) dx \quad J = \int_{-2}^1 (5x^2 - 7x) dx$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x) dx \quad L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$$

4 Soit f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x \ln(x)$$

- Calculer $f'(x)$.
- En déduire une primitive de g sur $]0; +\infty[$.
- Calculer $\int_1^e g(x) dx$.

5 Soit f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x \quad \text{et} \quad F(x) = (x-1)e^x$$

- Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- En déduire $\int_0^1 f(x) dx$.

6 Soit f la fonction définie sur $I =]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x+1}$$

- Démontrer que $\forall x \in I, f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$.
- Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

7 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^3 (3x+1)^2 dx \quad J = \int_1^2 \frac{x^2+3}{x} dx$$

$$K = \int_1^{\ln 2} e^{4t} dt \quad L = \int_{-1}^2 5t^2 e^{t^3} dt$$

$$M = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1} dt \quad N = \int_0^1 \frac{3x}{2x^2+1} dx$$

$$O = \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad P = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$$

$$Q = \int_{\ln 1}^{\ln 2} \frac{e^t}{\sqrt{e^t+1}} dt \quad R = \int_1^e \frac{1}{x} \ln(2x) dx$$

$$S = \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx \quad T = \int_0^{\pi} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) dx$$

8 Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\int_{-1}^3 f(x) dx = 2$ et $\int_{-1}^3 g(x) dx = -5$.

Calculer :

a. $\int_{-1}^3 7f(x) dx$ b. $\int_{-1}^3 f(x) + g(x) dx$

c. $\int_{-1}^3 (2f(x) - 3g(x)) dx$

9 On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos x + \sin x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos x + \sin x} dx$$

- Calculer $I + J$ et $I - J$.
- En déduire les valeurs de I et J .

10 Soit $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$.

- Calculer I et $I + J$.
- En déduire la valeur de J .

11 Soit $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$.

- Calculer I .
- Montrer que $I + J = \frac{1}{2}$.
- En déduire la valeur de J .

12 1. En utilisant la relation de Chasles, calculer :

$$I = \int_{-3}^5 |x| dx$$

2. Même question pour $J = \int_{-1}^8 |x-5| dx$.

13 Soit f une fonction définie et continue sur $[-5; 7]$ telle que $\forall x \in [-5; 7], -1 \leq f(x) \leq 3$.

Justifier que : $-12 \leq \int_{-5}^7 f(x) dx \leq 36$.

14 Démontrer que $\forall x \in [0; 1], 0 \leq xe^{-x} \leq xe^{-x^2}$ et en déduire que $0 \leq \int_0^1 xe^{-x} dx \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

15 Démontrer que $0 \leq \int_1^2 x^2 \ln(x) dx \leq \frac{7}{3} \ln(2)$