

TRIGONOMÉTRIE

1 Résoudre les équations dans $] - \pi ; \pi]$.

1. $2 \cos^2(x) + 9 \cos(x) + 4 = 0$

2. $4 \sin^2(x) - 3 = 0$

2 1. Montrer que $12 + 8\sqrt{2} = (2 + 2\sqrt{2})^2$

2. Résoudre $4x^2 + (2 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

3. Résoudre dans $] - \pi ; \pi]$ puis dans $[0 ; 2\pi[$:

$$4 \cos^2(x) + (2 - 2\sqrt{2}) \cos(x) - \sqrt{2} = 0$$

3 On considère qu'on se place sur un intervalle adapté. Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = x \cos x$$

$$g(x) = e^{-x} \sin x$$

$$h(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$i(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$j(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$k(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

$$l(x) = \cos^2(x)$$

$$m(x) = \sin(x^2 + 1)$$

$$n(x) = x e^{\sin x}$$

$$o(x) = \sin^2(x) \cos(x)$$

4 Même consigne que l'exercice précédent.

$$f(x) = \sqrt{x} \sin x$$

$$g(x) = \ln(\cos x)$$

$$h(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$i(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$j(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$k(x) = \frac{3 + \cos x}{3 + \sin x}$$

$$l(x) = \sin^3(x)$$

$$m(x) = \cos(4x - 5)$$

$$n(x) = \sin(x) (1 - \cos x)^3$$

5 Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin(3x) - \cos(2x)$$

$$g(x) = \sin(x) (1 - \cos(x))^2$$

$$h(x) = \cos(x) e^{\sin(x)}$$

$$i(x) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$j(x) = \sin(x) \cos(x)$$

$$k(x) = \sin(x) \cos^2(x)$$

$$l(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$m(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$$

6 Résoudre dans $] - \pi ; \pi]$ puis dans $[0 ; 2\pi[$:

1. $\cos x < \frac{-1}{2}$

2. $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $-2 \cos x \leq \sqrt{2}$

4. $2 \sin x > \sqrt{3}$

7 Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[0 ; 2\pi[$:

1. $f(x) = \cos(x) + 1$

2. $f(x) = \sin(x) - 4$

3. $f(x) = 1 + \sqrt{2} \cos(x)$

4. $f(x) = -2 \cos(x) + \sqrt{2}$

5. $f(x) = -4 \cos(x) + 2\sqrt{3}$

8 La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ par $f(x) = 2 \cos^2 x - \cos x$.

1. Étudier le signe de $2 \cos x - 1$ sur $[0 ; \pi]$.

2. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0 ; \pi]$.

9 On pose $f(x) = \cos^2 x + 2 \cos x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

1. a. Factoriser $P(x) = x^2 + 2x - 3$.

b. En déduire la factorisation de $f(x)$.

2. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

10 La fonction f est définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - 3 \cos x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Exprimer $f(-x)$ et $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.

2. Pourquoi suffit-il d'étudier f sur $I = [0 ; \pi]$?

3. Déterminer $f'(x)$.

4. Dresser le tableau de variation de f sur I .

6. Tracer $\mathcal{C}$ sur I puis la compléter sur $[-\pi ; 0]$ et sur $[\pi ; 3\pi]$.

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x) + 2}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où 1 cm représente une unité sur l'axe des abscisses et 4 cm représentent une unité sur l'axe des ordonnées.

1. a. Montrer que f est 2π -périodique.

b. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{C}$?

c. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0 ; 2\pi]$.

2. a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

b. Montrer que $f'(x)$ a le signe de $(-\cos x)$ sur $[0 ; 2\pi]$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 2\pi]$.

3. Représenter $\mathcal{C}$ sur $[0 ; 2\pi]$.

12 a et b sont deux nombres réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

Sa courbe représentative dans le plan passe par les points A(0 ; 6) et B($\frac{\pi}{2}$; 2).

1. a. Justifier que a est égal à 6.

b. Déterminer l'expression de f .

2. a. Montrer que f est périodique de période 2π .

b. Interpréter graphiquement ce résultat.

13 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ par $f(x) = 2 \sin x - x$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan.

1. a. Montrer que f est impaire.

b. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{C}$?

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

b. Résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $[0 ; \pi]$.

c. Résoudre l'inéquation $\cos x > \frac{1}{2}$ sur $[0 ; \pi]$.

d. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; \pi]$.

3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; \pi]$.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère du plan.

14 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{2} \sin^2 x + 2 \cos x$$

1. a. Étudier l'éventuelle parité de f .

b. Montrer que f est 2π -périodique.

c. Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$.

2. Étudier les variations de f sur $[0 ; \pi]$.

3. Représenter la fonction f sur $[-\pi ; 3\pi]$.

15 Soit f la fonction telle que :

$$f(x) = \frac{2}{3 + 2 \cos x}$$

- Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
- a. Exprimer $f(-x)$ et $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
b. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $I = [0; \pi]$.
- Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et étudier son signe sur I .
- Dresser le tableau de variation de f sur I .
- Tracer la courbe représentative de f sur I et la compléter sur $[-\pi; 0]$ puis sur $[\pi; 3\pi]$.

16 On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = 2 \sin x - x \cos x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en 0.
- Montrer que f est convexe sur I .
- En déduire que : $\forall x \in I, 2 \sin x - x \cos x \geq x$

17 Soit f la fonction définie sur $I = [0; \pi]$ par $f(x) = \sin x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

- Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $\frac{\pi}{3}$.
- Montrer que f est concave sur I .
- En déduire que, pour tout réel x de I , on a :

$$\sin x \leq \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

18 Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par :

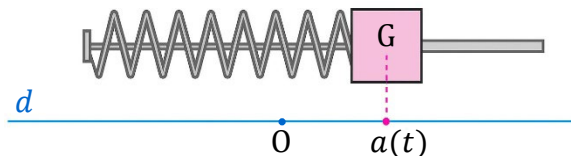
$$f(x) = \cos(x) \sin(x)$$

- a. Montrer que $f'(x) = 2 \cos^2 x - 1$.
b. Montrer que :

$$f''(x) = 2 \left(\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.
- Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
- Tracer la courbe représentative de f .

19 Un solide accroché à un ressort peut glisser sans frottements sur une tige horizontale. Lorsque le solide est à l'équilibre, son centre d'inertie G se situe à la verticale du point O , origine de l'axe des abscisses d . L'unité est le mètre.



Le solide est écarté de 10 cm de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. On considère la fonction a qui à tout réel t positif associe l'abscisse de G à l'instant t (en secondes).

On admet que $a(t) = a_0 \sin(2\pi t + \varphi)$, où a_0 et φ sont des nombres réels et $0 \leq \varphi \leq \pi$.

- a. Déterminer l'expression de la vitesse $a'(t)$ en fonction de t .
b. Sachant que la vitesse est nulle à l'instant $t = 0$ et que le solide a 0,1 pour abscisse, déterminer la valeur de φ et celle de a_0 .
- Exprimer $a(t + 1)$ en fonction de $a(t)$. Que peut-on en déduire ?
- a. Vérifier que pour tout réel t positif :

$$a'(t) = 0,2\pi \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- b. Déterminer le signe de $a'(t)$ sur l'intervalle $[0; 0,5]$ puis sur l'intervalle $[0,5; 1]$.
- c. En déduire le tableau de variation de la fonction a sur l'intervalle $[0; 1]$.
- a. Tracer la courbe représentative de la fonction a sur l'intervalle $[0; 2]$ en prenant comme unités graphiques 1 cm pour 0,25 en abscisses et 2 cm pour 0,1 en ordonnées.
- b. Déterminer à quels instants on a :
a. $a(t) = 0$ b. $a(t) = -0,1$ c. $a(t) = 0,05$

20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où 3 cm représentent π unités sur l'axe des abscisses et 2 cm représentent une unité sur l'axe des ordonnées.

- Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- a. Démontrer que f est 2π -périodique.
b. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?
- a. Démontrer que f est impaire.
b. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?
- À l'aide des questions 2.a. et 3.a., montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.
- a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1 + 2 \cos x}{(2 + \cos x)^2}$
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.
c. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.