

PRIMITIVES & ÉQUA. DIFF.

1 Soit f, u et v les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}, u(x) = -\frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{3x-1}{x}$

1. Montrer que u et v sont des primitives de f sur $]0; +\infty[$.
2. Simplifier $u(x) - v(x)$ et expliquer ce résultat.

2 1. Montrer que F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln(x)$ est une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 1$.
2. Donner deux autres primitives de f sur $]0; +\infty[$.

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.
1. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

4 Déterminer sur $]0; +\infty[$ une primitive de chacune des fonctions f, g et h telles que

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = x^{-3}, h(x) = \frac{2}{x^3}$$

5 Soit f la fonction définie par $f(x) = 2xe^{x^2}$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que f s'écrit sous la forme $u'e^u$, où u est une fonction dont on donnera l'expression.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

6 Soit f la fonction définie sur $]1,5; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

1. Écrire f sous la forme $k \frac{u'}{\sqrt{u}}$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]1,5; +\infty[$.

7 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x} \text{ et } g(x) = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

8 Soit F la fonction définie sur $] -\infty; 2[$ par :

$$F(x) = (x-2)\sqrt{2-x}$$

1. Calculer $F'(x)$.
2. En déduire une primitive sur $] -\infty; 2[$ de la fonction f définie $f(x) = \sqrt{2-x}$.

9 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.
Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x^2(a \ln(x) + b)$ soit une primitive de f .

10 1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$.
2. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x}$.

11 Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^3 - 3x + 7 & g(x) &= 7x^2 - x + \sqrt{2} \\ h(x) &= 2x^4 - \frac{1}{2}x^3 & i(x) &= \frac{x^2}{5} + \frac{6}{x} + \frac{3}{4} \\ j(x) &= (x-1)(x+2) & k(x) &= (3x+1)^2 \end{aligned}$$

12 Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 1 + \frac{1}{x} & g(x) &= x^2 + \frac{4}{x^2} \\ h(x) &= x - \frac{1}{2x} & i(x) &= \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^4} \\ j(x) &= \frac{x+5}{x^2} & k(x) &= \frac{3x^2 - 5x + 3}{x} \\ l(x) &= \frac{3x^2 - 11}{x^2} & m(x) &= \frac{4 - x\sqrt{x}}{x^2} \end{aligned}$$

13 Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 7(5x+1)^2 & g(x) &= 3e^{2-3x} \\ h(x) &= \frac{7}{\sqrt{4x-3}} & i(x) &= \frac{5}{2-7x} \end{aligned}$$

$$j(x) = \frac{4}{(3x+5)^2}$$

$$k(x) = \frac{5x}{x^2+1}$$

$$l(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+7}}$$

$$m(x) = \frac{8x^2}{\sqrt{5x^3+2}}$$

$$n(x) = 2e^{-x+3}$$

$$o(x) = 9xe^{x^2-3}$$

$$p(x) = 3x(5-2x^2)^3$$

$$q(x) = e^x(e^x+3)^3$$

$$r(x) = \frac{4x}{3x^2+1}$$

$$s(x) = \frac{3x-3}{(x^2-2x+4)^2}$$

$$t(x) = \frac{1}{e^x}$$

$$u(x) = \frac{3}{e^{-x}(e^x+1)}$$

14 Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I :

$$f(x) = \frac{2}{x}(\ln(x) + 2)^2 \text{ sur } I =]0; +\infty[$$

$$g(x) = \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{1}{3x-1} \text{ sur } I = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$$

$$h(x) = \frac{\ln(x)}{x} \text{ sur } I =]0; +\infty[$$

$$i(x) = \frac{1}{x \ln(x)} \text{ sur } I =]1; +\infty[$$

$$j(x) = \frac{-3-e^x}{(e^x+3x)^2} \text{ sur } I = [0; +\infty[$$

15 Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x}{(x-2)(2x+1)}$$

1. Déterminer $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, $\forall x \in]2; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{2x+1}$$

2. En déduire les primitives de f sur $]2; +\infty[$.

16 Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x de $] -1; +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1}$$

2. En déduire les primitives de f sur $] -1; +\infty[$.

17 1. Soit l'équation différentielle $y' = 6x^2 + 8x$, pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5$ est une solution de cette équation.

2. Déterminer $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $h(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation différentielle $x^2y' + (x - 1)y = 2x^2 - x$.

18 Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation différentielle $xy' - 2y = 5x + 6$.

19 Soit l'équation différentielle $y' = y$.

1. Résoudre cette équation.

2. Montrer que la solution f de cette équation telle que $f(0) = 1$ est la fonction exponentielle.

20 Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 5y$. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(1) = 4$.

21 Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $y' = -2y$
2. $3y' - 2y = 0$
3. $-y' + 0,1y = 0$
4. $y' + \ln(2)y = 0$

22 Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer la solution f vérifiant la condition donnée.

1. $y' = 5y$ et $f(0) = 1$
2. $y' + 6y = 0$ et $f(1) = 1$
3. $2y' - 3y = 0$ et $f(4) = 2$
4. $2y' = 5y$ et $f'(0) = 5$

23 La destruction de cellules bactériennes par la chaleur peut être mise en évidence en chauffant à une température donnée, pendant des durées variables, une suspension de telles cellules et en dénombrant les survivantes.

On désigne par $N(t)$ le nombre de cellules survivantes à l'instant t , exprimé en minutes. On admet que la fonction N est une solution sur

$[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $x' = ax$ où a est une constante qui dépend de la température de chauffage.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Préciser la solution de (E) vérifiant $N(0) = 10^5$ et $N(60) = 5\,000$. Arrondir à 10^{-2} la valeur de a .

24 On souhaite étudier la vitesse de rotation angulaire lors du freinage d'un disque dans un liquide. Cette vitesse $N(t)$ représente le nombre de tours par minute à l'instant t exprimé en minutes. On admet que la fonction N vérifie l'équation différentielle $y' = -\ln(100)y$.

1. Déterminer N sachant que $N(0) = 1\,500$.
2. Calculer la vitesse angulaire à l'instant $t = 1$.
3. Au bout de combien de temps la vitesse angulaire sera-t-elle d'un tour par minute ? Donner la valeur exacte et une valeur approchée au centième de minute.

25 Soit l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + 3$

1. Déterminer la solution particulière constante de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

26 Déterminer la fonction f solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' + 6y = 1$ dont la courbe représentative passe par le point $A(2; 0)$.

27 On chauffe dans une grande cuve un liquide et on appelle $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes, g étant une fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$. La température à l'instant initial est de 20°C .

On admet que la fonction g vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,0002y = 0,02$.

1. Exprimer $g(t)$ en fonction de t .
2. Quelle sera la température du liquide au bout d'une heure ?
3. Au bout de combien de temps la température dépasse-t-elle 85°C ? Donner la réponse en heures, minutes et secondes.

28 Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u , définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).

2. En déduire toutes les solutions de (E).

29 Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = x$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation (E).

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

30 On considère les équations différentielles :

$$(E) : y' + 4y = 3xe^{2x}$$

$$(E') : y' + 4y = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E').

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\right)e^{2x}$ est une solution de (E).

3. Déterminer la solution générale de (E).

31 Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = xe^x$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$ soit une solution de (E).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

3. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

32 Soit l'équation différentielle :

$$y' - 2y = 4x^2 - 4x$$

1. Déterminer une solution particulière u de cette équation de la forme $u(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des réels que l'on déterminera.

2. Déterminer la solution générale de cette équation.

3. Déterminer la solution f de cette équation telle que $f'(1) = 2$.