

DÉRIVATION

0.1 Quelques révisions de 1^{ère}... Dériver :

$$f_1(x) = 2x^2 - 8x + 2 \quad f_2(x) = -5x^2 + 4x - 3$$

$$f_3(x) = \frac{-4}{3}x^2 + 7x + \frac{1}{2} \quad f_4(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + \pi$$

$$f_5(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{5x}{6} - 1 \quad f_6(x) = \frac{-x^4}{4} + 3x^2 - x$$

$$f_7(x) = (3x - 1)(1 - 2x) \quad f_8(x) = 5(x - 2)(4 - x)$$

$$f_9(x) = (4 - 3x)(2x^2 + 5) \quad f_{10}(x) = (8x + 2)^2$$

$$f_{11}(x) = (4 - 7x)^2 \quad f_{12}(x) = (x^2 - 9)^2$$

$$f_{13}(x) = \frac{2}{x} \quad f_{14}(x) = 3x - \frac{3}{x}$$

$$f_{15}(x) = \frac{4}{5x} - \frac{2x}{5} \quad f_{16}(x) = \frac{5}{x^2}$$

$$f_{17}(x) = \frac{-5}{x^3} \quad f_{18}(x) = \frac{1}{3x + 1}$$

$$f_{19}(x) = \frac{-2}{3 + 7x} \quad f_{20}(x) = \frac{2(6x - 5)}{5x + 3}$$

$$f_{21}(x) = \frac{1 - 4x}{4 + 2x} \quad f_{22}(x) = \frac{5x + 3}{1 - 3x}$$

0.2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d parallèle à l'axe des abscisses.
 - Avec la calculatrice, représenter $\mathcal{C}_f$ et d .
Conjecturer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à d .
 - Démontrer cette conjecture.
- Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

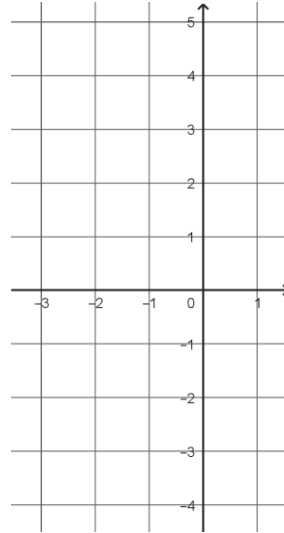
1 Sans se poser de questions sur l'ensemble de dérivabilité, dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2} \quad g(x) = \sqrt{e^x + 1}$$

$$h(x) = x\sqrt{x^2 + 4} \quad r(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

2 Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x\sqrt{x + 3}$

- Déterminer son ensemble de définition.
 - Déterminer son ensemble de dérivabilité.
- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - Calculer $f'(x)$.
 - Déterminer les variations de f .
 - A quoi qu'elle ressemble cette fonction ?



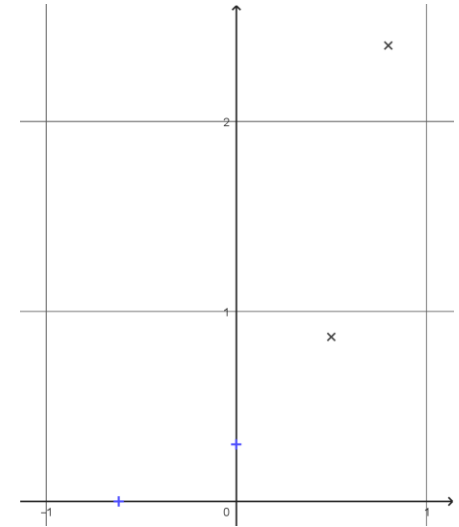
3 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x + 1)}{1 - x}}$

- Déterminer son ensemble de définition.
- Déterminer son ensemble de dérivabilité.
 - Vérifier que :

$$f'(x) = \frac{-x \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)}{(1 - x)^2 \sqrt{\frac{x^2(x + 1)}{1 - x}}}$$

- Etudier les variations de f .
- Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$.
 - Que peut-on en déduire graphiquement ?
- Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x)$.
 - Que peut-on en déduire graphiquement ?
- Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f'(x)$.

- Que peut-on en déduire graphiquement ?
- Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.



4 Sans se poser de questions sur l'ensemble de dérivabilité, dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = (3x + 1)^3 \quad g(x) = (1 - 5e^x)^2$$

$$h(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3} \quad r(x) = \frac{1}{(e^x + 3)^4}$$

$$s(x) = (2e^x - 1)^3 \quad t(x) = 3(1 - x)^3$$

5 Dériver les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

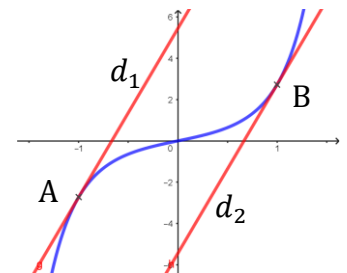
$$f(x) = e^{1+x+x^2} \quad g(x) = \sqrt{e^x + 1}$$

$$h(x) = \frac{1}{e^{-x} + 3} \quad r(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3}$$

6 Soit f la fonction définie par $f(x) = 5e^{0,2x^2 + 0,5x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$. Sur la figure ci-contre, on a représenté $\mathcal{C}_f$ ainsi que ses deux tangentes d_1 et d_2 aux points A et B d'abscisses -1 et 1.

Les tangentes d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?



8 Soit f la fonction définie par $f(x) = 3 + xe^{1-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Calculer la limite de f en $-\infty$.
- a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
b. Que peut-on en déduire graphiquement ?
- a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.
b. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (e^{1-0,5x} - 1)^2$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote.
- a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
b. Construire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Partie A

- Justifier chaque donnée du tableau de variation de la fonction f ci-dessous :

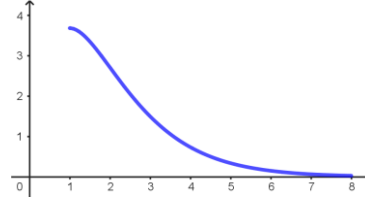
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		1	

- On veut montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} \geq x^2 + 1$.
On pose $h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
a. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$.
b. Étudier le signe de $h'(x)$.
c. Conclure quant à la question initiale.

Partie B

- Calculer les limites de g en 0 à gauche et à droite.
- Utiliser le résultat démontré dans la partie A pour calculer la limite de g en $+\infty$.
- a. Montrer que $\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) \leq x + \frac{1}{x}$.
b. En déduire la limite de g en $-\infty$.
- a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x)$ a le même signe que $2x^2 - 1$.
b. Dresser le tableau de variation de g .

11 Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un nouveau toboggan pour ses pandas. Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre. $\mathcal{C}$ représente la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 8]$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont deux entiers naturels.



- On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminer la valeur de l'entier b .
- On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de l'entier a .
- On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de $[1; 8]$ par $f(x) = 10xe^{-x}$.
a. Montrer que pour tout réel $x \in [1; 8]$:
$$f'(x) = 10(1-x)e^{-x}$$

b. Étudier les variations de f' sur $[1; 8]$.
c. On considère un point M de la courbe. La valeur absolue du coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point M est appelée « pente » du toboggan au point M. En quel point du toboggan la pente est-elle la plus grande ?

12 1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$$

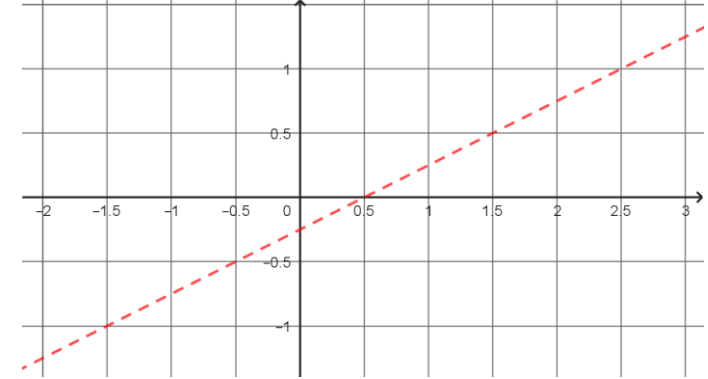
- Étudier les variations de φ .
 - En déduire le signe de $\varphi(x)$ en fonction de x .
- 2° Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

- Vérifier que $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

- En déduire le tableau de variation de f .
- Donner l'allure de la courbe représentative de f .

$\Rightarrow$ On peut prouver que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = 0$: la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est une asymptote (oblique) à $\mathcal{C}_f$.



13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$$

- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- En déduire que $\forall x \in \left[\frac{4}{3}; 2\right], f(x) \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$.
- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq f(x)$.
On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
- Étude du cas $\frac{4}{3} \leq u_0 \leq 2$.
a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
b. En déduire que (u_n) est convergente.
c. Prouver que la limite de (u_n) est égale à 2.
- Étude du cas particulier $u_0 = 3$.
On admet que dans ce cas, (u_n) tend vers $+\infty$. Recopier et compléter la fonction «seuil» ci-contre écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.
- Étude du cas $u_0 > 2$.
À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

```
def seuil() :
    u=3
    n=0
    while...
        u=...
        n=...
    return n
```