

LOI BINOMIALE

1 On lance une pièce de monnaie équilibrée et on appelle « succès » l'obtention d'un « Pile ». Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque série de cinq lancers, associe le nombre de succès obtenus.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
2. Quelle est la formule permettant de déterminer $p(Y = 2)$? Faire ce calcul.

2 On lance cinq fois de suite un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. On s'intéresse à la variable aléatoire X qui, à chaque série de cinq lancers, associe le nombre de fois où un nombre supérieur ou égal à 15 apparaît.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

3 On estime que 71 % des français portent des lunettes de vue. On interroge 5 personnes au hasard : on considère qu'elles portent des lunettes de vue de façon indépendante.

Soit X la variable aléatoire qui, à une série de cinq personnes interrogées, associe le nombre de personnes possédant des lunettes.

La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

4 Un panier contient 15 fraises et 35 framboises. On tire au hasard et successivement trois fruits, que l'on mange après chaque tirage. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fraises mangées. La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner ses paramètres.

5 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,1$.

1. Déterminer les valeurs exactes de $p(X = 0)$, $p(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de $p(X \geq 3)$.

6 On considère la variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5; \frac{1}{3}\right)$.

1. Déterminer la valeur exacte de $p(X = 1)$, puis la valeur exacte de $p(X \leq 2)$.
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,8$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de $p(Y = 17)$.

7 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,9$.

1. Calculer à 10^{-4} près $p(X = 27)$ et $p(X \geq 27)$.
2. Calculer à 10^{-4} près $p(21 \leq X \leq 25)$.

8 Dans un jeu vidéo, la probabilité de réussir le lancement d'un sort spécial est 0,7.

1. Le sort est lancé 4 fois de suite. On suppose que la réussite d'un sort n'influe pas sur les autres.
 - a. Montrer que la probabilité qu'aucun des quatre sorts ne soit réussi est 0,0081.
 - b. Calculer la probabilité qu'au moins un sort soit réussi.
2. a. On lance le sort n fois de suite, et on note X la variable aléatoire qui, aux n lancements de sorts, associe le nombre de lancements de sorts réussis. Exprimer $p(X \geq 1)$ en fonction de n .
 b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour que la probabilité qu'au moins un sort soit lancé avec succès dépasse 0,999.

9 Pour financer une sortie, les membres d'une association organisent une loterie. 70 % des membres de cette association pratiquent le tennis. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard et de manière indépendante pour tenir la loterie.

1. Déterminer la probabilité pour qu'en 4 semaines consécutives, il y ait exactement deux membres pratiquant le tennis parmi ceux qui sont choisis.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre pratiquant le tennis parmi les membres choisis.

- a. Exprimer p_n en fonction de n .
- b. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que la probabilité p_n soit supérieure ou égale à 0,95.

10 On suppose que chacun des moteurs d'un avion peut tomber en panne indépendamment des autres avec une probabilité p . L'avion reste en vol si au moins la moitié de ses moteurs fonctionnent.

1. On considère un avion avec deux moteurs. Exprimer en fonction de p la probabilité que l'avion ne puisse pas rester en vol.
2. On considère un avion à quatre moteurs. En remarquant que l'avion ne peut rester en vol si trois ou quatre de ses moteurs sont en panne, exprimer en fonction de p la probabilité que l'avion ne puisse pas rester en vol.
3. Déterminer selon quelles valeurs de p on a plus intérêt à prendre un avion à deux moteurs qu'un avion à quatre moteurs.

11 Dans une équipe de basket, on sait que cinq joueurs réussissent leurs deux lancers francs successifs avec une probabilité égale à 0,45. Lors d'un match, ces cinq joueurs effectuent de façon indépendante deux lancers francs successifs. On appelle succès le fait de réussir deux lancers francs successifs. On considère la variable aléatoire X qui, à un match, associe le nombre de succès.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement $\{X = 2\}$.
3. Quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, qu'il y ait au plus deux basketteurs qui réussissent leurs deux lancers francs ?

12 Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle. Les relevés réalisés au cours des premières journées d'enquête permettent de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait. Un employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.

On suppose que le fichier client est suffisamment important pour que les choix soient considérés comme étant réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.

1. Déterminer la probabilité que cet employé obtienne cinq souscriptions un jour donné. On arrondira le résultat au centième.
2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. On donnera une valeur arrondie à 10^{-4} .

13 Dans une coopérative fruitière, on estime la proportion de fruits présentant un défaut d'aspect à 5 %. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de douze fruits, associe le nombre de fruits examinés présentant un défaut d'aspect.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité de $\{X = 3\}$.
3. Calculer $p(4 \leq X \leq 7)$.
4. Si le nombre de fruits avec un défaut dans un lot est strictement supérieur à deux, le lot est soldé. Quelle est la probabilité que cela arrive ?

14 Dans une population de grand effectif, on a observé que 5 % des individus sont allergiques au médicament A et que 40 % sont allergiques au médicament B. Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire et ce de façon indépendante. On examine un échantillon de analyses choisies au hasard. La variable aléatoire X associe à ces n analyses le nombre d'individus allergiques à A qu'elles révèlent.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2. On suppose que $n = 10$. Calculer, à 10^{-2} près, les probabilités des événements suivants :
 - aucune analyse ne révèle l'allergie à A ;
 - au moins deux analyses révèlent l'allergie à A.
3. Un organisme tiers établit que 2 % des individus sont simultanément allergiques à A et B. Peut-on en conclure que les événements « être allergique à A » et « être allergique à B » sont indépendants ?
4. On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.
 - a. Déterminer le plus petit entier a tel que $p(Y \leq a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $p(Y \leq b) \geq 0,975$. En déduire un intervalle I tel que $p(Y \in I) \geq 0,95$.
 - b. Dans un échantillon de 100 analyses, on a observé que 30 individus révèlent l'allergie à B. Que peut-on en conclure ?

15 Au Japon, un hôtel capsule a une capacité d'accueil de 70 places et n'héberge que des personnes ayant préalablement réservé. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente à l'hôtel est estimée à 0,8.

On note n le nombre de réservations prises par l'hôtel et X la variable aléatoire qui, à chaque groupe de n personnes ayant réservé, associe le nombre de personnes qui se présentent à l'hôtel. Chaque personne prend sa réservation pour elle seule et de façon indépendante des autres.

1. Quelle est alors la loi suivie par X ?
2. Afin de compenser ses pertes, l'hôtel décide de recourir à la surréservation et prend 82 réservations. Quelle est la probabilité à 10^{-4} près qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients ayant réservé qui se présentent ?
3. Déterminer le nombre maximal de réservations que l'hôtel peut prendre en étant sûr à 95 % de ne pas décevoir une personne ayant réservé.

16 Dans une population donnée, 30 % des personnes interrogées se disent sans religion. On appelle X variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 200 personnes choisies au hasard, associe le nombre de personnes se disant sans religion.

1. Quelle est la loi suivie par la variable X ?
2. Déterminer le plus petit entier b tel que $p(X \leq b) \geq 0,9$.
3. En déduire un intervalle $[a ; b]$ tel que $p(X \in [a ; b])$ soit supérieure à 90 %.
4. Interpréter le résultat précédent.

17 Une enquête réalisée auprès des Français de plus de 18 ans révèle que 57 % d'entre eux disent jouer à des jeux vidéo.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 200 personnes de plus de 18 ans choisies au hasard, associe le nombre d'adeptes de jeux vidéo.

1. Quelle loi suit la variable X ?
2. Déterminer le plus petit entier b tel que $p(X \leq b) \geq 0,95$.
3. En déduire un intervalle $[a ; b]$ tel que $p(X \in [a ; b])$ soit supérieure à 95 %.
4. Interpréter le résultat précédent.

18 Dans un grand groupe industriel, une étude montre que 53 % des salariés se disent stressés par leur travail.

1. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 150 salariés du groupe choisis au hasard, associe le nombre de personnes stressées par leur travail. Quelle loi suit Y ?
2. Déterminer les entiers a et b tels que a est le plus petit entier tel que $p(Y \leq a) > 0,005$ et b est le plus petit entier tel que $p(Y \leq b) \geq 0,995$.
3. En déduire l'intervalle I tel que $p(Y \in I) \geq 0,99$. Interpréter.