

SUITES

1 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4n^2 + (-1)^n$. Déterminer sa limite.

2 Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -3n - (-1)^n$. Déterminer sa limite.

3 Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = -n^2 + 6 \cos n$. Déterminer sa limite.

4 Soit (t_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = \frac{\sin n}{n}$. Déterminer sa limite.

5 Déterminer les limites des suites ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = n - \sin n & 2. u_n = -n^2 + \cos n \\ 3. u_n = \frac{n}{2 + \cos n} & 4. u_n = \frac{n - \sin n}{n^2 + 1} \end{array}$$

6 Déterminer les limites des suites ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \frac{4n + (-1)^n}{n + 2} & 2. u_n = 5n^3 + (-1)^n \\ 3. u_n = \frac{-n + (-1)^n}{2n - (-1)^n} & 4. u_n = \frac{n^2 + (-1)^n \sqrt{n}}{n} \end{array}$$

7 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 1$. Justifier que (u_n) est minorée.

8 On considère la suite de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n}$$

La suite (u_n) est-elle majorée par 1 ? Par 2 ?

9 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n + 3$.
Démontrer que (u_n) est minorée par 2.

10 Soit (v_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 0,75v_n + 2 \end{cases}$$

Démontrer que (v_n) est majorée par 8.

11 Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{5n}{n+1}$ est majorée par 5.

12 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 75$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,6u_n + 50$.
Démontrer que (u_n) est majorée par 125.

13 Démontrer les suites ci-dessous sont bornées.

$$1. u_n = 7 + \sin n \quad 2. v_n = 5 \cos n$$

14 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$u_n = u_{n-1} + \frac{n}{2^n}$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$
2. En déduire que (u_n) est majorée.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $n+2 \leq 2^n$.
4. La suite (u_n) est-elle minorée ?

15 Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$.
2. Démontrer que (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ?
4. Calculer la limite de la suite (u_n) .

16 Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3 \end{cases}$$

1. a. A l'aide de la calculatrice, calculer les dix premiers termes de (u_n) .
b. Conjecturer le sens de variation de (u_n) et une majoration de (u_n) .
2. Montrer que (u_n) est majorée par 9.
3. a. Montrer que $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 3$.
b. En déduire le sens de variation de (u_n) .
4. Justifier que (u_n) converge et calculer sa limite.

17 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

1. Démontrer que (u_n) est majorée par 2.
2. En déduire que (u_n) est croissante.
3. Conclure quant à la convergence de (u_n) et calculer sa limite.

18 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1,8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n}$

1. Démontrer que (u_n) est bornée par 1 et 2.
2. Démontrer que (u_n) est décroissante.
3. Conclure quant à la convergence de (u_n) et calculer sa limite.

19 Vrai ou Faux ? Justifier.

1. Toute suite convergente est décroissante ou croissante.
2. Toute suite croissante qui converge vers 0 est majorée par 0.
3. Une suite qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

20 Déterminer les limites des suites ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = -25 \left(\frac{5}{6}\right)^n & 2. u_n = 2 \left(\frac{10}{7}\right)^n \\ 3. u_n = -7(\sqrt{3})^n & 4. u_n = (-\pi)^n \\ 5. u_n = 3^{n+1} & 6. u_n = 7 \times 0,5^n \end{array}$$

21 Déterminer les limites des suites ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \frac{4}{7^n} & 2. u_n = \frac{2 \times 12^n}{6 \times 4^n} \\ 3. u_n = \frac{(-1)^n \times 3^n}{(-0,1)^n} & 4. u_n = \frac{(-4)^{n+1}}{5^n} \end{array}$$

22 Déterminer les limites des suites ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = 4^7 + 7^n & 2. u_n = 2 \times 12^n + 3^n - 5 \\ 3. u_n = 9^n - 3^n & 4. u_n = 4^n + (-2)^n + 4 \\ 5. u_n = \sum_{k=0}^n 2^k & 6. u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{048}} \end{array}$$

23 Déterminer les limites des suites ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \frac{2^n - 3^n}{5^n + 4^n} & 2. u_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n - 1} \\ 3. u_n = \frac{5^n + (-3)^n}{2^n + 3(-1)^n} & 4. u_n = \frac{(-2)^n + (-3)^n}{(-5)^n + (-1)^n} \end{array}$$

24 Déterminer les limites des suites ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = 0,5^n \times \cos n & 2. u_n = 3^n + \sin n \\ 3. u_n = \frac{1}{n} \times \sin(2^n) & 4. \end{array}$$

25 Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}$$

On pose $v_n = u_n - 1$.

1. Montrer que (v_n) est géométrique.
2. Déterminer le terme général de (u_n) .
3. La suite (u_n) converge-t-elle ?

26 Soit (v_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = \frac{-2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$
2. La suite (v_n) converge-t-elle ?

27 Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. Soit (t_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

Montrer que (t_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

3. Exprimer t_n en fonction de n .
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
5. En déduire la convergence de (u_n) et sa limite.
6. A quoi servait la question 1. ?

28 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,5$ et pour

$$\text{tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1 + 2x}$.
2. a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.
b. Etudier le sens de variation de (u_n) .
3. En déduire que (u_n) converge. Calculer sa limite.
4. a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$
b. En déduire la limite de (u_n) .

29 Dans une ville de 20 000 habitants, à 7 heures du matin, 100 personnes apprennent une rumeur. Une heure plus tard, 350 personnes en tout la connaissent...

Soit u_n le nombre de personnes au courant de cette rumeur au bout de n heures. On suppose que le nombre de personnes touchées par la rumeur dans l'intervalle $[n ; n + 1]$ est proportionnel à u_n .

1. a. Montrer qu'il existe un réel α tel que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = (1 + \alpha)u_n$.
b. Quelle est la nature de (u_n) ?
c. Préciser u_0 et u_1 et en déduire α .
d. En déduire que $u_n = 100 \times 3,5^n$.
2. a. Etudier le sens de variation de (u_n) .
b. Déterminer la limite de (u_n) .
c. Compléter l'algorithme ci-contre dont l'objectif est de déterminer le nombre minimal d'heures N au bout duquel toute la ville sera au courant.

$U \leftarrow \dots$
$N \leftarrow \dots$
Tant que ...
$U \leftarrow \dots$
$N \leftarrow \dots$
Fin Tant que