

RÉCURRENCES & LIMITES

0 Un agriculteur souhaite faire creuser un puits : le creusage du 1^{er} mètre coûte 500 €, puis le creusage de chaque mètre supplémentaire coûte 150 € de plus que le précédent. On note u_n le prix que coûte le creusage du $n^{\text{ème}}$ mètre.

1° Vérifier que $u_n = 350 + 150n$

2° a. Combien coûte le creusage du 13^{ème} mètre ?

b. Quel est le coût d'un puits de 13 mètres ?

3° Quelle profondeur pourrait atteindre son puits avec un budget de 40 000 € ?

1 Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = 0,5v_n + 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2 - 0,5^n$.

2 Soit (t_n) la suite définie par $t_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = 2t_n + 3$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = 2^{n+2} - 3$.

3 Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 5$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq 20$.

4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq n$.

5 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 2$.

1. Calculer u_1 .

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

3. En déduire le sens de variation de (u_n) .

6 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 4$.

1. Calculer v_1 .

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geq v_n$.

3. En déduire le sens de variation de (v_n) .

7 Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$1. \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$4. \sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

8 Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = 3 + \frac{1}{n^2}$.

1. A partir de quel rang a-t-on $w_n \in]2,99 ; 3,01[$?

2. Démontrer que (w_n) converge vers 3.

9 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{8n-3}{5+2n}$.

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

10 Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a. A partir de quel rang a-t-on $v_n > 1\,000$?

b. Même question pour $v_n > 10^6$.

2. Démontrer que (v_n) tend vers $+\infty$.

11 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3 - 7n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. A partir de quel rang a-t-on $u_n < -10\,000$?

2. Démontrer que (u_n) diverge vers $-\infty$.

12 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

13 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -n^2$. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

14 Déterminer la limite des suites définies par :

$$u_n = 7\sqrt{n} + \frac{5}{2n^2} \quad v_n = \frac{5}{n^3} - 2n^2$$

$$w_n = -2n^3 - n + \frac{3}{n^2} \quad r_n = \frac{-2}{3-7n}$$

$$s_n = \frac{-3}{2n^2-8} \quad t_n = \frac{7}{3-4n^2}$$

15 Déterminer la limite des suites définies par :

$$u_n = (3-n^2)(n^3-5) \quad v_n = \left(-4 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)(n-7)$$

$$w_n = \frac{2}{5n} \times \frac{-3}{5-4n} \quad t_n = (2-3n)(n^2+5)$$

16 Déterminer la limite des suites définies par :

$$u_n = \frac{3 - \frac{2}{n^2}}{3n+8} \quad v_n = \frac{n^2}{-3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$w_n = \frac{\frac{5}{n} + 9}{-3 + \frac{2}{n^2}} \quad t_n = \frac{\frac{3}{n} - 2}{-5 + \frac{4}{\sqrt{n}}}$$

17 Déterminer la limite des suites définies par :

$$u_n = 3n^2 - 7n + 1 \quad v_n = -5 + 6n - 2n^2$$

$$w_n = 3 - 2n + 5n^3 \quad t_n = -7n^2 + 3n - 4$$

18 Déterminer la limite des suites définies par :

$$u_n = \frac{3n^2 - 8n + 2}{5 - 2n} \quad v_n = \frac{2 + 3n - n^2}{3n^2 + 2n - 3}$$

$$w_n = \frac{7 + 3n^2}{3n^3 - 5n^2 - 7} \quad t_n = \frac{2 - 5n^3}{5n^2 + 7n - 1}$$

19 Déterminer la limite des suites définies par :

$$u_n = 3n^2 - 5\sqrt{n} \quad v_n = 2n - 3n\sqrt{n}$$

$$w_n = \frac{3 - 5\sqrt{n}}{2n - 5} \quad r_n = \frac{3n\sqrt{n} - n}{5n - 2}$$

$$s_n = \frac{3n^2 - 7n + 2\sqrt{n}}{2n - 3n^2}$$