

On souhaite prouver que $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

On pose $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$.

Soit $a \in]0 ; +\infty[$ et soit h un réel tel que $a + h \geq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\&= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} && \text{On a multiplié par la partie conjuguée...} \\&= \frac{\sqrt{a+h}^2 - \sqrt{a}^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} && \dots \text{ qui fait apparaître la 3}^{\text{ème}} \text{ identité remarquable.} \\&= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\&= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\&= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} && \text{La simplification par } h \text{ fait que } h = 0 \text{ n'est plus une valeur interdite}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où } f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\&= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \\&= \frac{1}{2\sqrt{a}}\end{aligned}$$