

# VARIATIONS

- 1** 1. Démontrer que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3x + 7$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .  
 2. Démontrer que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = -5x + 3$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .  
 3. Démontrer que la fonction  $h$  définie par  $h(x) = x^2 - 9$  est croissante sur  $[3; +\infty[$ .  
 4. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 + 2x - 8$  et soit  $x_1$  et  $x_2$  deux réels de  $[-1; +\infty[$ ,  $x_2 > x_1$ .  
 a. Démontrer que :  

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2)$$
  
 b. En déduire que  $f$  est croissante sur  $[-1; +\infty[$ .

**2** Soit  $g$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . Dans chacun des cas, comparer  $g(0,5)$  et  $g(1)$ .

1.  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

**3** Voici le tableau de variation d'une fonction  $h$ .

| $x$    | -3 | 1  | 5 |
|--------|----|----|---|
| $h(x)$ | 0  | -1 | 4 |

1. a. Quelles sont les images de -3, 1 et 5 par  $h$  ?  
 b. En déduire les coordonnées de trois points de la courbe représentative de  $h$ .
2. Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter  $h$ .

**4** Voici le tableau de variation d'une fonction  $g$ .

| $x$    | -4 | -1 | 2 | 5  |
|--------|----|----|---|----|
| $g(x)$ | 2  | -3 | 3 | -1 |

1. Quel est l'ensemble de définition de  $g$  ?
2. Décrire par des phrases les variations de  $g$ .
3. Tracer une courbe pouvant représenter  $g$ .

**5** Voici le tableau de variation d'une fonction  $f$  :

| $x$    | -5 | 0 | 1  | 2  |
|--------|----|---|----|----|
| $f(x)$ | 2  | 5 | -4 | -1 |

Tracer une courbe pouvant représenter  $f$ .

**6** Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-2; 7]$  telle que :

- $f$  est croissante sur  $[-2; 5]$  et sur  $[6; 7]$
- $f$  est décroissante sur  $[5; 6]$
- $f(-2) = f(6) = -1$  et  $f(5) = f(7) = 1$

1. Construire le tableau de variation de  $f$ .
2. Tracer une courbe pouvant représenter  $f$ .

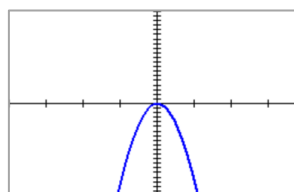
**7** Voici le tableau de variation d'une fonction  $f$  :

| $x$    | -4 | 1  | 5 |
|--------|----|----|---|
| $f(x)$ | 0  | -2 | 3 |

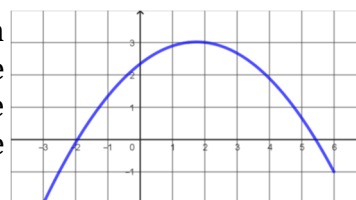
1. Décrire par des phrases les variations de  $f$ .
2. Comparer les nombres suivants :  
 a.  $f(2)$  et  $f(4)$       b.  $f(-3)$  et  $f(0)$
3. Expliquer pourquoi, sans autre information, on ne peut pas comparer  $f(0)$  et  $f(2)$ .

**8** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-4; 4]$  par  $f(x) = x^4 - 18x^2$ .

1. Avec la fenêtre standard de la calculatrice, on a obtenu la courbe ci-contre. Conjecturer les variations de  $f$ .
2. a. Trouver la fenêtre qu'il faut choisir sur la calculatrice pour afficher toute la courbe.  
 b. Conjecturer les variations de  $f$  sur  $[-4; 4]$ .

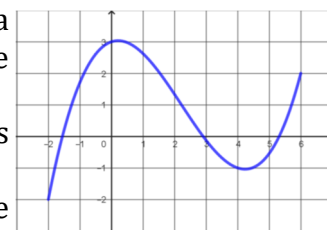


**9**  $f$  est la fonction définie sur l'intervalle  $[-3; 6]$  par sa courbe représentative donnée ci-contre.



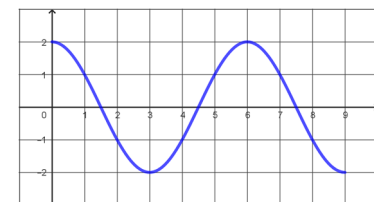
Dresser le tableau de variation de  $f$ .

**10** On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction  $f$ .



1. Décrire par des phrases les variations de  $f$ .
2. Construire le tableau de variation de  $f$ .

**11** Même exercice que le précédent avec la courbe ci-contre.



**12** On considère la fonction  $g$  définie sur  $[-1; 8]$  par  $g(x) = -2x^2 + 20x + 19$ .

1. Construire le tableau de valeurs de  $g$  pour  $x$  variant de -1 à 8 avec un pas de 1.
2. Trouver la fenêtre qu'il faut choisir sur la calculatrice pour afficher toute la courbe de  $g$ .
3. a. Faire une conjecture sur les variations de  $g$ .  
 b. On sait que  $g$  change de sens de variation en une valeur entière de  $x$ . Construire le tableau de variation de la fonction  $g$ .

**13** Voici le tableau de variation d'une fonction  $f$  :

| $x$    | -3 | 1 | 5  |
|--------|----|---|----|
| $f(x)$ | -7 | 2 | -6 |

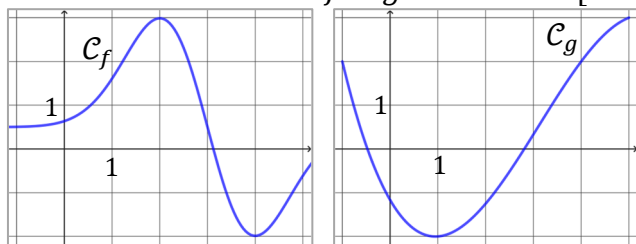
Déterminer le minimum et le maximum de  $f$  sur  $[-3; 5]$ . En quelles valeurs de  $x$  sont-ils atteints ?

**14** Voici le tableau de variation d'une fonction  $f$  :

| $x$    | -2 | 0  | 1 |
|--------|----|----|---|
| $f(x)$ | 2  | -4 | 1 |

1. Déterminer le minimum et le maximum de  $f$  sur  $[-2; 1]$ , et les valeurs de  $x$  où sont atteints.
2. Donner deux réels  $m$  et  $M$  tels que, pour tous réels  $x$  de  $[-2; 1]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$ .

**15** On donne ci-dessous les courbes représentatives de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[-1 ; 5]$ .



Déterminer le minimum et le maximum des fonctions  $f$  et  $g$  sur  $[-1 ; 5]$ . Préciser en quelles valeurs de  $x$  ils sont atteints.

**16** Soit  $f$  une fonction dont on donne le tableau de variation.

|        |    |    |   |    |
|--------|----|----|---|----|
| $x$    | -4 | 0  | 2 | 6  |
| $f(x)$ | 0  | -1 | 1 | -2 |

Déterminer le minimum et le maximum de  $f$  sur chacun des intervalles suivants. Préciser en quelles valeurs de  $x$  ils sont atteints.

- $[-4 ; 6]$
- $[-4 ; 2]$
- $[0 ; 6]$

**17** Soit  $f$  une fonction dont on donne le tableau de variation.

|        |    |    |    |   |
|--------|----|----|----|---|
| $x$    | -4 | -2 | 1  | 3 |
| $f(x)$ | -3 | -1 | -2 | 5 |

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

- Pour tout  $x$  tel que  $-4 \leq x \leq 3$ , on a  $f(x) \leq 3$ .
- Il existe un réel  $x$  de  $[-4 ; 1]$  tel que  $f(x) \geq 0$ .
- Pour tout  $x$  tel que  $-4 \leq x \leq 3$ , on a  $f(x) \geq -3$ .
- Pour tout  $x$  tel que  $-2 \leq x \leq 3$ , on a  $f(x) \leq 0$ .

**18** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 0,1x - 7$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- Justifier que  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- Sans calcul, comparer les nombres suivants :  
a.  $f(-1)$  et  $f(1)$       b.  $f(\sqrt{2})$  et  $f(1)$

**19** Justifier, en utilisant le sens de variation des fonctions de référence, chacune des inégalités suivantes :

- $0,5^2 \leq 0,75^2$
- $(-5)^3 \leq 2^3$
- $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}$
- $\sqrt{0,5} \leq \sqrt{2}$

**20** Justifier, en utilisant le sens de variation des fonctions de référence, chacune des inégalités suivantes :

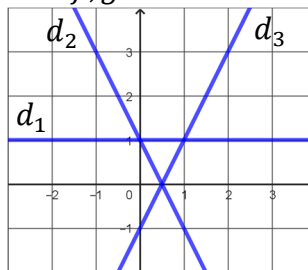
- $(-3)^2 \leq (-1)^2$
- $0,01^3 \leq 0,1^3$
- $\frac{1}{-3} \geq \frac{1}{-2}$
- $1 \leq \sqrt{3}$

**21**  $f$  est une fonction affine définie sur  $\mathbb{R}$ . Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation de  $f$ , tracer sa courbe représentative et déterminer le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

- $f(x) = 3,5x - 5$
- $f(x) = 8 - 2x$

**22** On considère les fonctions  $f, g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 - 2x$ ,  $g(x) = -1 + 2x$ ,  $h(x) = 1$

- Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions  $f, g$  et  $h$ .
- Associer à chacune des fonctions  $f, g$  et  $h$  sa courbe représentative  $d_1, d_2$  ou  $d_3$ .
- Déterminer le signe de  $f(x), g(x)$  et  $h(x)$ .



**23** Soit  $x$  un nombre réel tel que  $x \geq 5$ . Que peut-on dire de chacun des nombres suivants ?

- $x^2$
- $\frac{1}{x}$
- $x^3$
- $\sqrt{x}$
- $3 - 2x$
- $x^2$
- $\frac{1}{x}$
- $x^3$

**24** Soit  $x$  un nombre réel tel que  $1 \leq x \leq 100$ . Déterminer un encadrement de chacun des nombres suivants.

- $x^2$
- $\frac{1}{x}$
- $x^3$
- $\sqrt{x}$
- $1 - x$

**25** Une entreprise fabrique des dés cubiques en bois de masse volumique  $0,5 \text{ g/cm}^3$  et dont l'arête est comprise entre  $4 \text{ cm}$  et  $4,1 \text{ cm}$ .

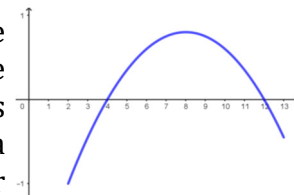
- Donner un encadrement du volume d'un dé.
- Donner un encadrement de la masse d'un dé.

**26** Une entreprise produit quotidiennement entre  $2$  et  $13$  tonnes de peinture. Le coût de production, en milliers d'euros, de  $x$  tonnes de peinture est modélisé par la fonction  $C$  définie sur  $[2 ; 13]$  par  $C(x) = 0,05x^2 - 0,13x + 2,4$ .

L'entreprise fixe le prix de vente d'une tonne de peinture à  $670 \text{ €}$ . On note  $R$  la fonction qui, au nombre  $x$  de tonnes vendues, associe la recette en milliers d'euros.

- Justifier que  $R(x) = 0,67x$ .
  - Quel est le sens de variation de  $R$  ? Justifier.
  - À l'aide d'une calculatrice, établir une conjecture sur :  
- le sens de variation de la fonction  $C$   
- les quantités à produire et vendre pour réaliser un bénéfice

2. On a représenté ci-contre la fonction  $B$  qui modélise le bénéfice en milliers d'euros en fonction de la quantité  $x$  en tonnes sur  $[2 ; 13]$  par  $B(x) = -0,05x^2 + 0,8x - 2,4$ .



- La fonction  $B$  change de sens de variation en une valeur entière de  $x$ . Construire son tableau de variation sur  $[2 ; 13]$ .
  - Déterminer le minimum et le maximum de la fonction  $B$  sur  $[2 ; 13]$ . Préciser en quelles valeurs de  $x$  ils sont atteints.
  - Quel est le bénéfice maximum que peut réaliser l'entreprise ?
3. La peinture est conditionnée dans des barils cubiques dont le côté est compris entre  $59$  et  $61 \text{ cm}$ . Donner un encadrement du volume (en litres) de peinture dans un baril.